



ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและ
จูเลียน-ชูลต์ซ ที่มีต่อความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 5

Effects of Organization Mathematics Learning Activities Emphasizing on Modeling
and Strategy based on Approach of Maynes and Julien-Schultz on Mathematical
Knowledge and Problem Solving Ability of Eleventh Grade Students

ณิชภาพร เจริญวานิชกูร¹ และ ไพโรจน์ น่วมนุ่่ม²

Nichaporn Charoenwanichkun¹ and Pairot Nuamnoom²

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับนักเรียนกลุ่มปกติ 2) เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองก่อนเรียนและหลังเรียน และ 3) ศึกษาพัฒนาการของความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนศรีอยุธยา ในพระอุปถัมภ์ฯ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560 จำนวน 90 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง จำนวน 44 คน และกลุ่มควบคุม จำนวน 46 คน เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดความรู้ทางคณิตศาสตร์และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และใบงาน วิเคราะห์ข้อมูลโดยหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่าที และการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา

ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 3) นักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการของความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ดีขึ้นเมื่อเปรียบเทียบเป็นระยะจากก่อนเรียน ระหว่างเรียน และหลังเรียน

คำสำคัญ: กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ชูลต์ซ /
ความรู้ทางคณิตศาสตร์ / ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

Article Info: Received 6 November, 2017; Received in revised form 6 August, 2018; Accepted 18 September, 2019

¹ นิสิตมหาบัณฑิตสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อีเมล : NCP_MayNichaporn@hotmail.com

Graduate student in Mathematics Education Division, Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education,
Chulalongkorn University Email: NCP_MayNichaporn@hotmail.com

² อาจารย์ประจำสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อีเมล : pairoj_m@yahoo.com

Lecturer in Mathematics Education Division, Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education,
Chulalongkorn University Email: pairoj_m@yahoo.com

Abstract

The purposes of this research were 1) to compare the mathematical knowledge and mathematical problem solving abilities of students between an experimental group and a control group, 2) to compare the mathematical problem solving abilities of the students in the experimental group between, before and after learning, and 3) to study the development of mathematical knowledge and mathematical problem solving abilities of the students in the experimental group. The subjects consisted of 90 eleventh grade students of Sri Ayudhya School in the first semester of academic year 2017. These students were divided into two groups consisting of an experimental group of 44 students and a control group of 46 students. The instruments used for data collection were mathematical knowledge tests, mathematical problem solving abilities tests and worksheets. The data were analyzed by arithmetic mean, standard deviation, *t*-test and content analysis.

The results of the study revealed that 1) the mathematical knowledge and problem solving abilities of students in the experimental group were higher than those of the students in the control group at a .05 level of significance, 2) the mathematical problem solving abilities of students in the experimental group after learning, were statistically higher than those before at a .05 level of significance, and 3) students in the experimental group gradually improved their mathematical knowledge and mathematical problem solving abilities in all three aspects when comparing before, during, and after being taught.

KEYWORDS: LEARNING ACTIVITIES EMPHASIZING ON MODELING AND STRATEGY BASED ON APPROACH OF MAYNES AND JULIEN-SCHULTZ / MATHEMATICAL KNOWLEDGE / MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING ABILITY

บทนำ

คณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อการพัฒนามนุษย์เป็นอย่างยิ่ง เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพัฒนาความคิดที่หลากหลาย ทั้งการคิดวิเคราะห์และสังเคราะห์ ทำให้คนมีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างมีวิจารณ์ญาณและคิดอย่างมีระเบียบแบบแผน ช่วยให้นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท], 2555) คณิตศาสตร์ยังมีบทบาทต่อความเจริญก้าวหน้าของสังคมยุคใหม่ และมีส่วนในการพัฒนาทักษะสำคัญในศตวรรษที่ 21 เช่น ทักษะการคิดวิเคราะห์ ทักษะการแก้ปัญหา ด้วยเหตุนี้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จึงกำหนดให้คณิตศาสตร์เป็นหนึ่งในแปดกลุ่มสาระ

การเรียนรู้ โดยมีเป้าหมายคือ ผู้เรียนทุกคนจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ มีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ไปใช้พัฒนาคุณภาพชีวิต ใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ ได้ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551)

อย่างไรก็ตาม การจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ยังไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร ดังจะเห็นได้จากผลการประเมินทั้งระดับชาติและนานาชาติ เช่น จากผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และ 6 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยอยู่ในระดับที่ควรได้รับการปรับปรุง โดยคะแนนส่วนใหญ่ไม่ถึงร้อยละ 50 (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2559) และจากผลการประเมินโครงการ TIMSS และ PISA พบว่า นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติ OECD (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2556) อีกทั้งยังมีคะแนนรายด้านอยู่ในเกณฑ์ระดับต่ำ สะท้อนให้เห็นว่านักเรียนไทยมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่เพียงพอ และมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับที่ควรได้รับการพัฒนาอย่างเร่งด่วน เนื่องจากการแก้ปัญหาเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1980: 1-3) และยังช่วยเสริมสร้างทักษะทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียนโดยตรง

ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เป็นความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ โดยทั่วไป ประกอบด้วย ความรู้เชิงโมโนทัศน์ หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับความคิดรวบยอด นิยาม ทฤษฎีบท กฎ สูตร สมบัติทางคณิตศาสตร์ และความรู้เชิงกระบวนการ หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ การใช้สูตรในการคำนวณ การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ความรู้ทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญและจำเป็นต่อการเรียนคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก เห็นได้จากการที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนดคุณภาพของผู้เรียนในการเรียนคณิตศาสตร์ไว้ว่า ผู้เรียนต้องสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดียิ่งขึ้น รวมทั้งสามารถนำไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551) นอกจากนี้ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีความสำคัญและจำเป็นด้วยเช่นกัน โดยเป็นความสามารถหนึ่งในทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ทำให้ให้นักเรียนได้รับประสบการณ์การเรียนรู้ เข้าใจ สามารถคิดเป็นและแก้ปัญหาได้ และมี

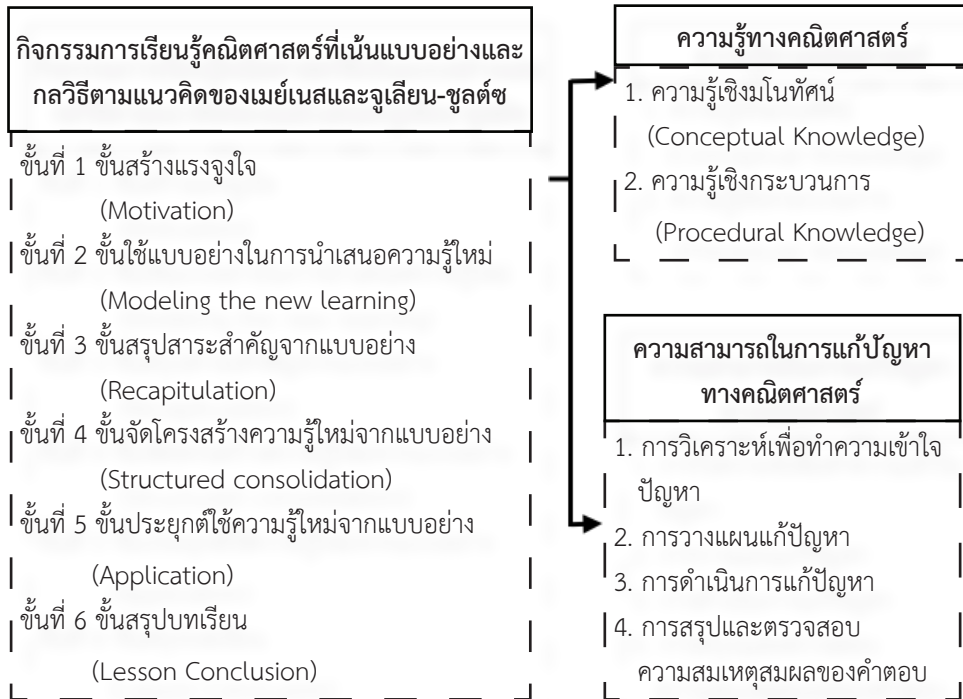
ความสำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ และยังถือเป็นความสามารถที่ควรพัฒนาให้เกิดขึ้นแก่นักเรียน ดังที่ Kennedy and Tipps (1994) ได้กล่าวว่า ทักษะกระบวนการที่เป็นเป้าหมายพื้นฐานในการสอนคณิตศาสตร์ คือ ทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สอดคล้องกับแผนการศึกษาแห่งชาติ วัตถุประสงค์ที่ 2 แนวนโยบายเพื่อการดำเนินการที่ 5 เป้าหมายข้อที่ 1 กล่าวว่า “ให้คนไทยทุกคนมีทักษะและกระบวนการในการคิด การวิเคราะห์ และทักษะการแก้ปัญหา มีความใฝ่รู้และสามารถประยุกต์ใช้ความรู้ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม สามารถพัฒนาตนเองได้อย่างต่อเนื่อง เติบโตตามศักยภาพ” (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2545)

สาเหตุหนึ่งที่ทำให้นักเรียนมีปัญหาด้านความรู้และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อาจเกิดจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูที่ยังเน้นการบรรยายมากเกินไป มีการอธิบายที่ไม่ชัดเจน ขาดเทคนิคการสอน ไม่ค่อยมีการปฏิบัติกิจกรรม การจัดบรรยากาศในการเรียนรู้ไม่สอดคล้องกับหลักความแตกต่างระหว่างผู้เรียน ครูไม่ค่อยอำนวยความสะดวกให้กับผู้เรียน รวมถึงขาดสื่อการสอนที่ดึงดูดให้นักเรียนมีแรงจูงใจในการเรียน ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่จะนำมาพัฒนาปัญหาดังกล่าว จึงได้ศึกษากิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและ จูเลียน-ชูลต์ซ

กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ชูลต์ซ พัฒนาขึ้นโดย Maynes and Julien-Schultz (2012) เน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ใหม่ผ่าน “แบบอย่าง (Modeling) ที่เป็นวิธีการคิดและขั้นตอนต่าง ๆ” โดยครูใช้กลวิธีต่าง ๆ เพื่อให้นักเรียนสร้างความรู้ผ่านแบบอย่าง นอกจากนั้น ยังเน้นการพัฒนาทักษะผ่านการฝึกปฏิบัติ 3 ลักษณะ ได้แก่ การฝึกปฏิบัติแบบมีโครงสร้าง (Structured practice) การฝึกปฏิบัติโดยมีการเสริมต่อการเรียนรู้ของครู (Scaffolded practice) และการฝึกปฏิบัติด้วยตนเองอย่างอิสระ (Independent practice) ซึ่งในระหว่างการฝึกปฏิบัติครูจะมีบทบาทในการสนับสนุนการเรียนรู้ตามความต้องการของนักเรียน และค่อย ๆ ลดบทบาทลง จนนักเรียนสามารถทำได้ด้วยตนเอง

ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ชูลต์ซที่มีต่อความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยศึกษากับเนื้อหา เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

กรอบแนวคิดการวิจัย



ภาพ 1 กรอบแนวคิดการวิจัย

วัตถุประสงค์

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ (1) เพื่อเปรียบเทียบความรู้ทางคณิตศาสตร์และ
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับ
กลุ่มควบคุม (2) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน
กลุ่มทดลองก่อนเรียนและหลังเรียน และ (3) เพื่อศึกษาพัฒนาการของความรู้ทางคณิตศาสตร์
และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

วิธีการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi – Experimental Study) ประกอบด้วย
กลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม โดยรูปแบบการวิจัยมีลักษณะ ดังนี้

ตาราง 1
รูปแบบการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง	การทดสอบก่อนการทดลอง	การทดลอง	การทดสอบหลังการทดลอง
กลุ่มทดลอง	- ความรู้ทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	X	- ความรู้ทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
กลุ่มควบคุม	- ความรู้ทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	~X	- ความรู้ทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการแก้ปัญหามทางคณิตศาสตร์

หมายเหตุ: สัญลักษณ์ที่ใช้ในรูปแบบการวิจัย

X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ชูลต์ซ

~X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ประชากรของการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 1 กรุงเทพมหานคร สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

กลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยใช้เทคนิคการเลือกแบบเจาะจง (Purpose sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่กำลังศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560 โรงเรียนศรีอยุธยา ในพระอุปถัมภ์ฯ กรุงเทพมหานคร โดยกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม คือ นักเรียนห้อง ม.5/2 จำนวน 44 คน และห้อง ม.5/3 จำนวน 46 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ชูลต์ซ จำนวน 15 แผน และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ จำนวน 15 แผน รวมทั้งสิ้น 15 คาบ คาบละ 50 นาที ครอบคลุมเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย 2.1 แบบวัดความรู้ทางคณิตศาสตร์ 2 ฉบับ ได้แก่ 1) ฉบับก่อนเรียน มีค่าความเที่ยง 0.639 ค่าความยาก 0.33–0.71 ค่าอำนาจจำแนก 0.25–0.63 และ 2) ฉบับหลังเรียน มีค่าความเที่ยง 0.798 ค่าความยาก 0.28–0.68 ค่าอำนาจจำแนก 0.35–0.63 2.2 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ 1) ฉบับก่อนเรียน มีค่าความเที่ยง 0.726 ค่าความยาก 0.20–0.25 ค่าอำนาจจำแนก 0.34–0.42 และ 2) ฉบับหลังเรียน มีค่าความเที่ยง 0.741 ค่าความยาก 0.21–0.32 ค่าอำนาจจำแนก 0.46–0.53 2.3 ใบงาน สร้างขึ้นเพื่อใช้ประเมินความรู้และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระหว่างเรียน 2.4 แบบสัมภาษณ์ สร้างขึ้นเพื่อสอบถามข้อมูลเชิงลึกเกี่ยวกับความรู้และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อนำมาประกอบการพิจารณาการวิเคราะห์พัฒนาการความรู้และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

วิธีการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเอง ดังนี้

1. สร้างแผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม มัธยมศึกษาปีที่ 5 ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ซูลต์ซ สำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ สำหรับกลุ่มควบคุม รวมถึงจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์ และเอกสารที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับกลุ่มตัวอย่าง
2. ดำเนินการสอบก่อนการทดลองของนักเรียนทั้งสองกลุ่มโดยใช้แบบวัดความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นใช้เวลาฉบับละ 50 นาที
3. ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ซูลต์ซ กับกลุ่มทดลอง จำนวนทั้งสิ้น 15 คาบ คาบละ 50 นาที และดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติกับกลุ่มควบคุม จำนวนทั้งสิ้น 15 คาบ คาบละ 50 นาที โดยสอนกลุ่มละ 4 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ เป็นเวลา 4 สัปดาห์ รวม 15 ชั่วโมง ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560 โดยสอนตามชั่วโมงปกติของโรงเรียนศรีอยุธยา ในพระอุปถัมภ์ฯ ในระหว่างการเรียนการสอนผู้วิจัยเก็บข้อมูลจากใบงานและแบบสัมภาษณ์

แบบกึ่งโครงสร้าง เพื่อศึกษาพัฒนาการความรู้และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

4. หลังจากที่ได้ดำเนินการสอนครบตามที่กำหนดแล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนทั้งสองกลุ่มทำแบบวัดความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียน และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยใช้เวลาฉบับละ 50 นาที จากนั้นผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล มีรายละเอียดดังนี้

1. เปรียบเทียบความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม ด้วยการทดสอบค่าที (Independent sample t-test)
2. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง ก่อนเรียนและหลังเรียน ด้วยการทดสอบค่าที (Dependent sample t-test)
3. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม ด้วยการทดสอบค่าที
4. วิเคราะห์พัฒนาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ด้วยการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content analysis)
5. วิเคราะห์พัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ด้วยการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา

ผลการวิจัย

1. นักเรียนกลุ่มทดลองมีความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงดังตาราง 2 และตาราง 3 ตามลำดับ

ตาราง 2

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (M) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) และค่าที (Independent sample t-test) ของคะแนนความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

	กลุ่มตัวอย่าง	n	M	SD	t	Sig
ความรู้ทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 25 คะแนน)	กลุ่มทดลอง	44	13.91	3.934	3.530	.001*
	กลุ่มควบคุม	46	11.09	3.811		

หมายเหตุ: * $p < .05$

ตาราง 3

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (M) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) และค่าที (Independent sample t-test) ของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

	กลุ่มตัวอย่าง	n	M	SD	t	Sig
ความสามารถในการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 32 คะแนน)	กลุ่มทดลอง	44	21.89	3.433	7.409	.000*
	กลุ่มควบคุม	46	14.47	5.826		

หมายเหตุ: * $p < .05$

2. นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงดังตาราง 4

ตาราง 4

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (M) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) และค่าที (Dependent sample t-test) ของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองก่อนเรียนและหลังเรียน

	n	ก่อนเรียน		หลังเรียน		t	Sig
		M	SD	M	SD		
ความสามารถในการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 32 คะแนน)	44	14.21	2.674	21.89	3.433	7.092	.000*

3. นักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการของความรู้ทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น มีรายละเอียด 2 ด้าน ดังนี้ นักเรียนมีพัฒนาการของความรู้ทางคณิตศาสตร์เชิงมโนทัศน์ดีขึ้น โดยก่อน

การทดลอง นักเรียนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในเนื้อหาบางเรื่อง และเมื่อการทดลองผ่านไป 3 สัปดาห์ นักเรียนมีพัฒนาการของความรู้ดีขึ้นอย่างชัดเจน โดยนักเรียนเข้าใจในเนื้อหาสาระได้ถูกต้อง และมีนักเรียนส่วนน้อยเท่านั้นที่ยังมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนในเนื้อหาที่เรียนอยู่ และนักเรียนมีพัฒนาการของความรู้ทางคณิตศาสตร์เชิงกระบวนการดีขึ้น โดยก่อนการทดลอง นักเรียนอธิบายการใช้ทฤษฎีบท กฎ สมบัติ ขั้นตอนการดำเนินการเพื่อหาคำตอบของปัญหาไม่ชัดเจน อธิบายแบบกว้าง ๆ ขาดรายละเอียด และเมื่อการทดลองผ่านจนถึงสัปดาห์สุดท้าย นักเรียนมีพัฒนาการความรู้ดีขึ้นอย่างเห็นได้ชัดเจน โดยนักเรียนสามารถอธิบายวิธีการหาคำตอบจนได้คำตอบที่ถูกต้อง รวมถึงนักเรียนใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง

นักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น โดยก่อนการทดลอง นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถวิเคราะห์โจทย์ด้วยตนเองได้ อีกทั้งไม่สามารถระบุความรู้ และเริ่มดำเนินการแก้ปัญหาได้ และเมื่อการทดลองผ่านจนถึงสัปดาห์สุดท้าย นักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาดีขึ้นอย่างชัดเจน โดยนักเรียนสามารถวิเคราะห์โจทย์ ระบุความรู้และขั้นตอนที่ใช้ในการแก้ปัญหา ดำเนินการแก้ปัญหา และตรวจสอบคำตอบได้เป็นอย่างดี

อภิปรายผล

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของ เมย์เนสและจูเลียน-ซูลต์ซที่มีต่อความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยนำเสนอการอภิปรายเป็น 3 ตอน ดังต่อไปนี้

ตอนที่ 1 ความรู้ทางคณิตศาสตร์

ผลการวิจัยที่พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความรู้ทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 1 ที่ผู้วิจัยตั้งไว้ และสอดคล้องกับงานวิจัยที่ใช้แนวคิดที่ใกล้เคียง คือ การค่อย ๆ ปล่อยความรับผิดชอบในการเรียนรู้ให้เป็นของนักเรียนทีละน้อย (Gradual Release of Responsibility model: GRR Model) และการเสริมต่อการเรียนรู้ได้แก่ งานวิจัยของ Kiong and Yong (2004) ที่พบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มปกติ และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้ยังช่วย

ให้นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์และภาษาทางคณิตศาสตร์ในการแก้โจทย์ปัญหาได้ ทั้งนี้อาจมีเหตุผลสนับสนุนดังนี้

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ชูลต์ซมีส่วนให้นักเรียนเกิดความรู้ในเนื้อหาที่เรียนทั้งความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการอย่างถูกต้องชัดเจน โดยมีขั้นตอนที่ช่วยพัฒนาให้นักเรียนเกิดความรู้ที่ถูกต้องอย่างค่อยเป็นค่อยไป กล่าวคือ ขั้นที่ 2 (Modeling the new learning) นักเรียนได้สังเกตและทำความเข้าใจเนื้อหาสาระที่ถูกต้องสมบูรณ์จาก “แบบอย่าง” ที่แสดงลักษณะสำคัญของความรู้ วิธีคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาที่ครูนำเสนอ โดยใช้กลวิธีต่างๆที่เน้นการอธิบายและการใช้สื่อที่หลากหลาย ขั้นที่ 3 (Recapitulation) นักเรียนได้สรุปสาระสำคัญจากแบบอย่าง que แสดงวิธีคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาอีกครั้งหนึ่ง จึงทำให้มีความรู้ที่ชัดเจนขึ้น หากมีประเด็นที่นักเรียนเข้าใจยากหรือเข้าใจไม่ถูกต้องชัดเจน ครูจะช่วยทำให้นักเรียนเข้าใจถูกต้อง และในขั้นที่ 4 (Structured consolidation) นักเรียนได้นำความรู้ใหม่หรือวิธีการแก้ปัญหาที่ได้จากแบบอย่างไปใช้งานในตัวอย่างปัญหา สถานการณ์ปัญหา หรือกิจกรรม จนเกิดความเข้าใจที่ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น รวมถึงในขั้นที่ 6 (Lesson conclusion) นักเรียนได้สะท้อนความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนและสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ด้วยตนเอง โดยในแต่ละชั้นจะมีครูคอยให้การสนับสนุนการเรียนรู้และความช่วยเหลือตามความต้องการของนักเรียน การดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่อง

นอกจากนี้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ชูลต์ซมีแนวคิดสอดคล้องกับแนวทางพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) ที่กล่าวว่า แนวทางการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ทำได้โดยเน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ร่วมกับการฝึกการรู้คิด (Metacognition) และได้เสนอหลักการเรียนรู้ไว้ว่า นักเรียนต้องเรียนคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ นักเรียนที่เรียนโดยการท่องจำสูตร กฎ ทฤษฎีหรือขั้นตอนกระบวนการต่าง ๆ โดยปราศจากความเข้าใจนั้น มักจะไม่สามารถนำความรู้นั้นไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และยังสอดคล้องกับ Shurkry (2003, อ้างถึงใน วัชรภรณ์ ปรานีธรรม, 2549) ที่กล่าวว่า การเรียนรู้ด้วยความเข้าใจเป็นสิ่งสำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เพราะการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ

จะทำให้ให้นักเรียนสามารถจดจำเนื้อหาได้ดีกว่าการเรียนรู้แบบท่องจำ ลักษณะสำคัญในส่วนที่ให้นักเรียน “นำความรู้ที่เรียนไปประยุกต์ใช้ในบริบทต่าง ๆ” สอดคล้องกับ Klausmeier and Ripple (1971) ที่กล่าวว่า การพัฒนาความรู้รวมถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนทำได้โดยการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ที่เรียนในการแก้ปัญหา และลักษณะสำคัญในส่วนที่ให้นักเรียน “สะท้อนการเรียนรู้ของตนเอง” สอดคล้องกับ Klausmeier and Ripple (1971) ที่กล่าวว่า การพัฒนาความรู้รวมถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนทำได้โดยการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ประเมินความรู้ความเข้าใจของตนเอง ตลอดจนครูควรให้ข้อมูลป้อนกลับเกี่ยวกับผลการเรียนรู้แก่นักเรียน เพื่อให้ทราบข้อผิดพลาดและสิ่งที่ต้องปรับปรุงแก้ไข อีกทั้งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ชูลต์ซเน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเอง และนำความรู้ไปใช้ด้วยตนเอง

นอกจากนั้น ผลการวิจัยข้างต้น ยังสอดคล้องกับ จิตรวรรณ เอกพันธ์ (2558) ที่ได้ศึกษาผลของการใช้กลยุทธ์การสอนเชิงบริบท ที่เน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเอง นำความรู้ไปใช้ด้วยตนเอง และส่งเสริมการแลกเปลี่ยนความรู้ พบว่า การที่นักเรียนได้สร้างความรู้ด้วยตนเองและนำความรู้ไปใช้ด้วยตนเอง ช่วยให้นักเรียนมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น และยังสอดคล้องกับ ศุภลักษณ์ ครุฑคง (2556) ที่ได้ศึกษาผลของการใช้วิธี IMPROVE และการเขียนบันทึกการเรียนรู้ พบว่า การเน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ และนำความรู้ไปใช้ด้วยตนเอง ผ่านการเรียนรู้ร่วมกัน จะช่วยพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้ดีขึ้นได้ เนื่องจากนักเรียนจะเป็นผู้สังเกตและสรุปสาระสำคัญของความรู้ด้วยตนเอง และสอดคล้องกับ Setiadewi (2013) ที่ได้ศึกษาผลการใช้โมเดล CRMI ที่เน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเองผ่านบริบทที่มีความสัมพันธ์กับสาระสำคัญของเนื้อหา พบว่า การสร้างความรู้ด้วยตนเองของนักเรียนทำให้นักเรียนมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น เมื่อพิจารณาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มควบคุม พบว่า กลุ่มควบคุมได้รับการจัดกิจกรรมโดยให้สร้างความรู้ใหม่จากแบบอย่างที่เป็นวิธีการคิดและขั้นตอนต่าง ๆ บ้าง และมีการสนับสนุนการเรียนรู้บ้างแต่ไม่ต่อเนื่องและเป็นระบบเหมือนกลุ่มทดลอง จึงอาจทำให้นักเรียนเข้าใจความรู้ไม่ถูกต้องชัดเจน และไม่ได้สะท้อนการเรียนรู้ของตนเอง

ตอนที่ 2 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ผลการวิจัยที่พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 สอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 2 และ 3 ที่ผู้วิจัยตั้งไว้ และสอดคล้องกับงานวิจัยที่ใช้แนวคิดที่ใกล้เคียง คือ การค่อย ๆ ปล่อยความรับผิดชอบในการเรียนรู้ให้เป็นของนักเรียนทีละน้อย และการเสริมต่อการเรียนรู้ ได้แก่ งานวิจัยของ Walkowiak, Berry, Meyer, Rimm-Kaufman, and Ottmar (2014) ที่พบว่า การจัดการเรียนรู้โดยวิธีการสอนแบบแลกเปลี่ยนบทบาทมาใช้กับกลุ่มขนาดเล็กในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นช่วยพัฒนาความเข้าใจให้กับนักเรียนในการอ่านปัญหาทางคณิตศาสตร์ และแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี ทั้งนี้อาจมีเหตุผลสนับสนุน 2 ประเด็น ดังนี้

1) เนื่องจากนักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระที่ถูกต้องชัดเจนจนสามารถสรุปและใช้ความรู้ได้ถูกต้อง ดังที่ได้อภิปรายมาแล้วในตอนที่ 1 จึงเป็นสาเหตุที่ทำให้ให้นักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้งานในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง

2) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ซูลต์ซมีขั้นที่ 5 (Application) ซึ่งในขั้นนี้นักเรียนได้ฝึกนำความรู้ใหม่หรือวิธีการแก้ปัญหาที่ได้เรียนรู้จากแบบอย่างไปประยุกต์ใช้ในบริบทใหม่ ได้ฝึกวิเคราะห์และทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาเนื่องจากเป็นบริบทใหม่ ได้ฝึกนำความรู้จากแบบอย่างมาสัมพันธ์กับปัญหา ได้ฝึกแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้ที่สัมพันธ์กับปัญหาตามขั้นตอน และได้ฝึกพิจารณาความถูกต้องของคำตอบ รวมถึงในขั้นที่ 6 (Lesson conclusion) นักเรียนได้สะท้อนความสามารถของตนเอง ว่ามีส่วนใดที่นักเรียนต้องพัฒนาต่อไป โดยในแต่ละขั้นจะมีครูคอยให้การสนับสนุนการเรียนรู้และความช่วยเหลือที่ปรับตามความสามารถของนักเรียน โดยเมื่อครูมั่นใจว่านักเรียนสามารถทำด้วยตนเองได้ จึงลดบทบาทของครูให้น้อยลง การดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่อง

นอกจากนี้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับ สมเดช บุญประจักษ์ (2540) ที่กล่าวว่า องค์ประกอบหนึ่งที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ ประสบการณ์ในการแก้ปัญหา ซึ่งเกิดจากการที่นักเรียนได้ฝึกนำความรู้ไปใช้กับสถานการณ์ต่างๆจนคุ้นเคย ดังที่ สิริพร ทิพย์คง (2545) ได้กล่าวว่า การเป็นผู้แก้ปัญหาที่ดีต้องได้รับ

ประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลายและมีความคุ้นเคยกับกระบวนการแก้ปัญหา นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ Leitze and Wiest (1997) ที่ได้ศึกษาถึงบทบาทของปัญหาแปลกใหม่และปัญหาในชีวิตจริงที่มีผลต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 4 และเกรด 6 โดยที่นักเรียนที่ใช้ในการศึกษาคั้งนี้เป็นนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคำ ผลการศึกษาพบว่า มีนักเรียนเกรด 4 จำนวน 58% ที่สามารถเลือกวิธีในการแก้ปัญหาได้เหมาะสม และนักเรียนเกรด 6 ใช้วิธีการแก้ปัญหาได้เหมาะสม 76% ของปัญหาที่ทำการแก้ และสอดคล้องกับ Bruner (1969) และ Le Blance, Proudfit, and Putl (1980) ที่ได้ให้คำแนะนำว่า การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนลงมือปฏิบัติ ส่งเสริมกระตุ้นการเรียนรู้ และสร้างแรงจูงใจ ครูต้องให้การช่วยเหลือ เตรียมคำถามที่ช่วยกระตุ้นความคิด และยังคงสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Jbeili (2012) ที่ศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือและการเสริมต่อการเรียนรู้ พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น หลังจากได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ให้การเสริมต่อการเรียนรู้ และยังคงสอดคล้องกับ อัมพร ม้าคนอง (2554) ที่กล่าวว่า สิ่งสำคัญที่จะทำให้นักเรียนพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้คือ นักเรียนต้องได้รับการเรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นระบบที่สามารถนำไปใช้กับการแก้ปัญหาใดๆก็ได้ และสอดคล้องกับแนวคิดของ สสวท. (2555) ที่กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่ให้นักเรียนได้มีความคิดและประสบการณ์ไปใช้ในการแก้ปัญหา และพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างต่อเนื่อง

ดังนั้น การมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย และการดำเนินการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบและต่อเนื่อง จึงมีความสำคัญต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น เมื่อพิจารณาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มควบคุม พบว่า กลุ่มควบคุมได้รับการจัดกิจกรรมโดยให้สร้างความรู้ใหม่จากแบบอย่างที่เป็นวิธีการคิดและขั้นตอนต่าง ๆ บ้าง มีการฝึกนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาในบริบทที่ไม่คุ้นเคยด้วยตนเองบ้าง และมีการสนับสนุนการเรียนรู้บ้าง แต่ไม่ต่อเนื่องและเป็นระบบเหมือนกลุ่มทดลอง จึงอาจทำให้นักเรียนไม่สามารถลงมือแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง อีกทั้งนักเรียนไม่ได้สะท้อนความสามารถของตนเอง นักเรียนจึงไม่ทราบว่าประเด็นใดที่ยังต้องพัฒนา จึงอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้นักเรียน

กลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม

ตอนที่ 3 พัฒนาการของความสามารถในการสรุปและใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.1 ผลการวิจัยที่พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการของความสามารถในการสรุปและใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น สอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 4 โดยจะนำเสนอการอภิปรายใน “ช่วงเวลาระหว่างการทดลอง” ดังนี้

ช่วงแรกของการทดลอง นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาสาระที่เรียนถูกต้องเพียงบางส่วน รวมถึงนักเรียนยังมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนอยู่บ้างในเนื้อหาบางประเด็น เช่น ในการตอบคำถามในใบงานเรื่อง “การนำสมบัติของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะไปใช้” โดยให้หาค่าของ $3\sqrt{8} - \sqrt[4]{64} + \sqrt[6]{8}$ นักเรียนไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้ระหว่าง $\sqrt[n]{a}$ กับ $a^{\frac{1}{n}}$ ได้ ครูต้องให้ความช่วยเหลืออย่างมาก และ ในการตอบคำถามในใบงานเรื่อง “การวาดกราฟของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = \log_a(x - h) + k$ โดยอาศัยการเลื่อนกราฟของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = \log_a x$ ” เป็นการให้เขียนกราฟของ $y = \log_5(x - 3) - 2$ นักเรียนสามารถแสดงวิธีการเขียนกราฟได้ โดยเลื่อนกราฟขนานแกน Y ได้ถูกต้อง แต่เลื่อนกราฟขนานแกน X ไม่ถูกต้อง เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ซูลต์ซออย่างต่อเนื่อง โดยผู้วิจัยกำหนด “แบบอย่าง” ซึ่งแสดงลักษณะสำคัญของความรู้ที่ถูกต้อง และแสดงวิธีการใช้ความรู้ในบริบทต่าง ๆ รวมถึงเลือกกลวิธีในการนำเสนอแบบอย่างและการให้ความช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ จากนั้นดำเนินการตามขั้นตอน เพื่อให้นักเรียนจัดโครงสร้างความรู้ที่ถูกต้อง กล่าวคือ ให้นักเรียนสังเกตและทำความเข้าใจเนื้อหาสาระจากแบบอย่างที่ครูนำเสนอจนเข้าใจดีแล้ว จากนั้นจึงเปิดโอกาสให้นักเรียนฝึกทำตามแบบอย่าง โดยนำความรู้ไปใช้ในบริบทต่าง ๆ จนสามารถทำได้ด้วยตนเอง

นอกจากนั้นในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แต่ละชั้น ครูจะให้ความช่วยเหลือและการสนับสนุนการเรียนรู้ให้นักเรียนตามความสามารถ โดยเมื่อครูแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจแล้วจึงลดบทบาทของครูลง และให้นักเรียนทำด้วยตัวเองอย่างอิสระ จนนักเรียนสามารถสรุปความรู้และนำความรู้ไปใช้ในบริบทได้อย่างถูกต้อง เช่น ในการตอบคำถามในใบงานเรื่อง “สมการเอกซ์โพเนนเชียล” โดยโจทย์ให้หาค่า x จากสมการ $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ เมื่อนักเรียนหาคำตอบของ e^x ได้ -2 และ 3 แล้วนักเรียนไม่สามารถสรุปคำตอบได้ว่า “ไม่มีค่า x

ที่สอดคล้องกับสมการ $e^x = -2$ เพราะค่า $e^x > 0$ ” และในการตอบคำถามในใบงาน “อสมการเอกซ์โพเนนเชียลและอสมการลอการิทึม” ซึ่งโจทย์ให้หาเซตคำตอบของอสมการ $(x)^{2x} < x^x$ เมื่อ $x > 0$ นักเรียนทราบว่า ต้องแยกพิจารณาฐานของลอการิทึม เพื่อตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด และแปลงเป็นอสมการปกติ จากนั้นแก้สมการ แล้วสรุปคำตอบ และเมื่อนักเรียนดำเนินการในแต่ละขั้นตอน พบว่า นักเรียนดำเนินการเพื่อหาคำตอบได้ถูกต้องทั้งหมด การดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่อง จึงอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้พัฒนาการของความสามารถในการสรุปและใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ทั้งความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการดีขึ้นเป็นลำดับ จนกระทั่ง ช่วงสุดท้ายของการทดลอง นักเรียนสามารถสรุปความรู้ที่เรียนและนำความรู้ไปใช้ด้วยตนเองได้อย่างชัดเจนและถูกต้องสมบูรณ์ สอดคล้องกับงานวิจัยของ จิตรวรรณ เอกพันธ์ (2558) ที่พบว่า การที่นักเรียนได้สร้างความรู้ด้วยตนเอง และนำความรู้ไปใช้ด้วยตนเอง ช่วยให้นักเรียนมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น

3.2 ผลการวิจัยที่พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น สอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 5 โดยจะนำเสนอการอภิปรายเป็นรายด้าน ดังนี้

ด้านการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา ระยะเวลาก่อนการทดลอง นักเรียนสามารถวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหาได้บ้าง โดยระบุสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและข้อมูลสำคัญที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้บ้าง แต่ไม่ครบถ้วน และตีความข้อมูลหรือเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในปัญหาได้ไม่ถูกต้องหรือถูกต้องบางส่วน เช่น ในการตอบคำถามในแบบวัดก่อนเรียนซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับ “จำนวนจริง” นักเรียนระบุสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบได้ แต่ระบุข้อมูลสำคัญที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้ไม่ครบถ้วน อีกทั้งนักเรียนตีความเงื่อนไขที่ว่า “ด้านยาวของที่ดินมีความยาวมากกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่ 2 วา” ไม่ถูกต้อง เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ชั้นที่ 5 (Application) และชั้นที่ 6 (Lesson conclusion) อย่างต่อเนื่อง โดยผู้วิจัยใช้บริบทที่ไม่คุ้นเคย เพื่อให้นักเรียนใช้ความรู้จากแบบอย่าง ซึ่งนักเรียนได้ฝึกวิเคราะห์ทำความเข้าใจบริบท ฝึกแยกแยะข้อมูลที่เป็นส่วนประกอบของบริบทและได้แปลความเงื่อนไขที่กำหนดในบริบท ประกอบกับในแต่ละชั้นครูให้ความช่วยเหลือและการสนับสนุนนักเรียนตามความสามารถจนกว่านักเรียนจะทำได้ด้วยตนเอง โดยเมื่อครูแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจแล้วจึงลดบทบาทของครูลง และให้นักเรียนทำด้วยตัวเองอย่างอิสระ เช่น ในการตอบคำถามใน

แบบวัดหลังเรียน ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับ “เครื่องชีวิต” นักเรียนระบุสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและระบุข้อมูลสำคัญที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้ครบถ้วน รวมถึงตีความข้อมูลทีโจทย์ให้มาได้ถูกต้อง โดยสามารถคำนวณหา ปริมาณของธาตุ B จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ การดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่อง จึงอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้พัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้านการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหาดีขึ้นเป็นลำดับ จนกระทั่งในระยะหลังการทดลอง นักเรียนสามารถวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหาได้อย่างชัดเจน โดยระบุสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและข้อมูลสำคัญที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ครบถ้วน และสามารถตีความข้อมูลหรือเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในปัญหาได้ถูกต้อง สอดคล้องกับผลการวิจัยของ อรวรรณ ต้นสุวรรณรัตน์ (2552) ที่พบว่า ชั้นทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา จะทำให้นักเรียนรู้จักวิเคราะห์โจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ว่า โจทย์ปัญหานั้นต้องการทราบอะไร และในโจทย์ปัญหานั้นบอกข้อมูลอะไรมาบ้างที่สามารถนำมาแก้ปัญหาได้

ด้านการวางแผนแก้ปัญหา ระยะก่อนการทดลอง นักเรียนสามารถวางแผนแก้ปัญหาได้บ้าง โดยเลือกความรู้และวิธีการทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหาได้บ้าง แต่ยังไม่ครบถ้วน และกำหนดแนวทางหรือลำดับขั้นในการแก้ปัญหาได้ไม่ถูกต้องหรือถูกต้องบางส่วน เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นที่ 5 (Application) และชั้นที่ 6 (Lesson conclusion) อย่างต่อเนื่อง โดยผู้วิจัยใช้บริบทที่ไม่คุ้นเคย เพื่อให้นักเรียนใช้ความรู้จากแบบอย่าง ซึ่งนักเรียนจะได้ฝึกเลือกใช้ความรู้ให้เหมาะสมกับปัญหา โดยในช่วงแรกนักเรียนเลือกความรู้เกินกว่าที่จำเป็น หรือน้อยกว่าที่จำเป็น แต่เมื่อครูให้คำแนะนำ นักเรียนสามารถเลือกได้ครบถ้วนมากขึ้น และได้ฝึกนำความรู้ที่เลือกมาจัดลำดับขั้นตอนที่เฉพาะเจาะจงเพื่อนำไปสู่การหาคำตอบได้ โดยช่วงแรกนักเรียนลำดับขั้นค่อนข้างกว้าง ขาดรายละเอียด ครูต้องให้ความช่วยเหลือ นักเรียนจึงสามารถลำดับได้เฉพาะเจาะจงมากขึ้น ประกอบกับในแต่ละขั้นครูให้ความช่วยเหลือและการสนับสนุนนักเรียนตามความสามารถจนกว่านักเรียนจะทำได้ด้วยตนเอง โดยเมื่อครูแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจแล้วจึงลดบทบาทของครูลง และให้นักเรียนทำด้วยตัวเองอย่างอิสระ เช่น ในการตอบคำถามในแบบวัดหลังเรียน ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับ “ระดับความเข้มข้น” โดยเป็นการประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันลอการิทึมมาแก้ปัญหา นักเรียนเลือกความรู้และวิธีการที่เหมาะสมกับปัญหาและถูกต้อง โดยสามารถระบุสมบัติของลอการิทึมที่จะใช้ได้ครบถ้วน รวมถึงกำหนดแนวทางหรือลำดับขั้นในการแก้ปัญหาที่นำไปสู่คำตอบได้

ถูกต้อง และมีรายละเอียดครบถ้วน การดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่อง จึงอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้พัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้านการวางแผนแก้ปัญหาดีขึ้นเป็นลำดับ จนกระทั่งในระยะหลังการทดลอง นักเรียนสามารถวางแผนแก้ปัญหาได้ดี โดยนักเรียนสามารถเลือกความรู้และวิธีการทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ครบถ้วน และกำหนดแนวทางหรือลำดับขั้นในการแก้ปัญหาได้ถูกต้องสมบูรณ์ สอดคล้องกับ Bitter (1990) ที่กล่าวว่า การสอนเพื่อให้นักเรียนพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา ครูควรให้นักเรียนได้ฝึกแก้ปัญหาที่น่าสนใจและท้าทายบ่อย ๆ ให้นักเรียนได้ร่วมมืออภิปรายวิธีการแก้ปัญหาและผลการแก้ปัญหานั้น รวมถึงควรให้เวลากับนักเรียนในการแก้ปัญหา

ด้านการดำเนินการแก้ปัญหา ระยะก่อนการทดลอง นักเรียนไม่สามารถดำเนินการแก้ปัญหาได้ ไม่มีร่องรอยแสดงการคิดคำนวณเพื่อเป็นแนวทางไปสู่คำตอบ เช่น ในการตอบคำถามในแบบวัดก่อนเรียน ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับ “ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน” นักเรียนไม่สามารถดำเนินการแก้ปัญหาได้ และไม่มีร่องรอยที่แสดงการคิดคำนวณจนนำไปสู่คำตอบ เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ชั้นที่ 5 (Application) และชั้นที่ 6 (Lesson conclusion) อย่างต่อเนื่อง โดยผู้วิจัยใช้บริบทที่ไม่คุ้นเคย เพื่อให้นักเรียนใช้ความรู้จากแบบอย่าง ซึ่งนักเรียนจะได้ฝึกนำลำดับขั้นตอนที่วางแผนไว้มาดำเนินการแก้ปัญหา และได้ฝึกความเป็นเหตุเป็นผลในการดำเนินการแก้ปัญหาในแต่ละขั้นตอน โดยในช่วงแรกนักเรียนไม่สามารถดำเนินการด้วยตนเองได้ ครูต้องให้ความช่วยเหลือด้วยการใช้คำถาม การให้ดูแบบอย่างที่เป็นวิธีการ จนนักเรียนลงมือทำได้ ประกอบกับในแต่ละขั้นครูให้ความช่วยเหลือและการสนับสนุนนักเรียนตามความสามารถจนกว่านักเรียนจะทำได้ด้วยตนเอง โดยเมื่อครูแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจแล้วจึงลดบทบาทของครูลง และให้นักเรียนทำด้วยตัวเองอย่างอิสระ เช่น ในการตอบคำถามในแบบวัดหลังเรียน ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับ “ระดับความเข้มเสียง” โดยเป็นการประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันลอการิทึมมาแก้ปัญหา นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหตามลำดับขั้นตอนที่ได้วางแผนไว้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ การดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่อง จึงอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้พัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้านการดำเนินการแก้ปัญหาคิดขึ้นเป็นลำดับ จนกระทั่งในระยะหลังการทดลอง นักเรียนสามารถคิดคำนวณและใช้เหตุผลในการดำเนินการแก้ปัญหาได้ถูกต้องสมบูรณ์ สอดคล้อง

กับ Bitter (1990) ที่กล่าวว่า การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาให้กับนักเรียน ครูควรให้นักเรียนได้ฝึกลงมือแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่แปลกใหม่ด้วยตนเองสม่ำเสมอ รวมถึงให้ความช่วยเหลือและเวลากับนักเรียนในการแก้ปัญหา

ด้านการสรุปและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ ระยะเวลาก่อนการทดลอง นักเรียนสามารถสรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้องบางส่วน เช่น ในการตอบคำถามในแบบวัดก่อนเรียน ซึ่งเป็นเรื่องเกี่ยวกับ “เลขยกกำลัง” นักเรียนเขียนแสดงการตรวจสอบคำตอบบางส่วนแต่ไม่ถูกต้อง และนักเรียนเขียนสรุปคำตอบไม่เกี่ยวข้อง กับสิ่งที่โจทย์ถาม เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นที่ 5 (Application) และขั้นที่ 6 (Lesson conclusion) อย่างต่อเนื่อง โดยผู้วิจัยใช้บริบทที่ไม่คุ้นเคย เพื่อให้นักเรียนใช้ความรู้จากแบบอย่าง ซึ่งนักเรียนจะได้ฝึกตรวจสอบคำตอบ และได้ฝึกพิจารณาความเป็นเหตุเป็นผลของสถานการณ์ปัญหาในบริบท รวมถึงได้ฝึกสรุปคำตอบที่ถูกต้อง โดยช่วงแรกนักเรียนแสดงวิธีการตรวจสอบและพิจารณาคำตอบไม่ถูกต้อง แต่เมื่อครูให้คำแนะนำจึงสามารถทำได้ด้วยตนเอง โดยครูให้ความสนับสนุนนักเรียนตามความสามารถจนนักเรียนทำได้ด้วยตนเอง โดยเมื่อครูแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจแล้วจึงลดบทบาทลง และให้นักเรียนทำด้วยตัวเองอย่างอิสระ เช่น ในการตอบคำถามในแบบวัดหลังเรียน ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับ “ระดับความเข้มข้น” โดยเป็นการประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันลอการิทึมมาแก้ปัญหา นักเรียนสามารถเขียนแสดงการตรวจคำตอบได้ถูกต้อง โดยแทนค่าความเข้มข้น และระดับความเข้มข้นลงในสมการ และสรุปคำตอบที่โจทย์ต้องการได้ถูกต้องสมบูรณ์ การดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่องจึงอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้พัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้านการสรุปและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบดีขึ้นเป็นลำดับ จนกระทั่งหลังการทดลอง นักเรียนสามารถสรุปและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะสำหรับการนำไปใช้

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ชูลต์ซ เน้น (1) การสร้างความรู้ผ่านแบบอย่าง โดยครูควรวิเคราะห์เนื้อหา

เพื่อกำหนดมโนทัศน์และลักษณะของแบบอย่าง รวมถึงเลือกกลวิธีให้เหมาะสมกับการนำเสนอ (2) ให้ความสำคัญกับการฝึกฝนใน 3 ลักษณะ โดยครูต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ฝึกปฏิบัติในแต่ละลักษณะอย่างเพียงพอ รวมถึงครูต้องแน่ใจว่านักเรียนสามารถทำตามแบบอย่างได้เอง จึงปล่อยให้ นักเรียนฝึกอย่างอิสระ (3) มีการเสริมต่อและสนับสนุนการเรียนรู้ระหว่างมีการฝึกฝน โดยครูควรวางบทบาทให้เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน โดยค่อย ๆ ลดบทบาทลงหากนักเรียนสามารถทำได้เองมากขึ้น และ (4) ให้ความสำคัญกับการสร้างแรงจูงใจก่อนการเรียนรู้ โดยครูควรเลือกสื่อประกอบให้เหมาะสมกับนักเรียน โดยเตรียมแผนผังกราฟิกและคลิปวิดีโอให้พร้อมก่อนเริ่มการจัดการเรียนการสอน

2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนสและจูเลียน-ซูลต์ซ เหมาะสำหรับนำไปใช้สอนเนื้อหาที่มีความซับซ้อนและยาก ครูควรคัดเลือกเนื้อหาที่เหมาะสม เพื่อให้สอดคล้องกับลักษณะการจัดกิจกรรม รวมถึงในระยะแรกนักเรียนจะยังไม่คุ้นเคยกับการสอนในลักษณะนี้ซึ่งมีการสนับสนุนและการเสริมต่อการเรียนรู้ของครู ครูควรสังเกตและกระตุ้นนักเรียนให้ถามสิ่งที่ยังไม่เข้าใจเป็นรายบุคคลเท่าที่จะสามารถทำได้

ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรนำแนวปฏิบัติการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนส และ จูเลียน-ซูลต์ซไปใช้ซ้ำกับเนื้อหาเรื่องอื่น เพื่อตรวจสอบความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2. ควรศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นแบบอย่างและกลวิธีตามแนวคิดของเมย์เนส และ จูเลียน-ซูลต์ซไปปรับใช้ในการจัดกิจกรรมเพื่อพัฒนาความรู้หรือความสามารถในด้านอื่น ๆ

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). *ตัวชี้วัดและสาระแกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพมหานคร: ชุมชนนวมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

- อรุณรัตน์ ต้นสุวรรณรัตน์. (2552). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาเชิงสร้างสรรค์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 (วิทยานิพนธ์ปริญญาโท)*. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร.
- อัมพร ม้าคอง. (2554). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ*. กรุงเทพมหานคร: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาษาอังกฤษ

- Bitter, G. G. (1990). *Mathematics method for the elementary and middle school: A comprehensive approach*. Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Jbeili, I. (2012). The effect of cooperative learning with metacognitive scaffolding on mathematics conceptual understanding and procedural fluency. *International Journal for Research in Education (IJRE)*. 32, 46-66.
- Bruner, L. S. (1969). *The process of education*. MA: Harvard University Press.
- Kennedy, L. M., & Tipps, S. (1994). *Guiding children's learning of mathematics*. Belmont, CA: Wadsworth.
- Klausmeier, H. J., & Ripple, R. E. (1971). *Learning and human abilities: Educational psychology*. New York: Harper Row.
- Kiong, L. N., & Yong, H. T. (2004). *Scaffolding: A teaching strategy for mathematics*. Retrieved from <http://math.ecnu.edu.cn>
- Le Blance, J. F., Proudfit, L., & Putl, I. J. (1980). *Teaching problem solving in the elementary school*. VA: Nation Council of Teachers of Mathematics.
- Leitze, A. R., & Wiest, L. R. (1997). *GOTCHA! story problems that grab children's interest*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Maynes, N., & Julien-Schultz, L. (2012). Complex instructional knowledge made accessible for teacher candidates through the alignment of concepts in visual format. *Teaching and Learning*, 7(1), 21-36.

National Council of Teacher of Mathematics [NCTM]. (1980). *An agenda for action recommendation for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Setiadewi, N. C. (2013). *The application of Learning - based concept-rich instruction to improved comprehension of fraction concept on elementary school students*. Retrieved from <http://repository.upi.edu/11750/>

Walkowiak, T. A., Berry, R. Q., Meyer, J. P., Rimm-Kaufman, S. E., & Ottmar, E. R. (2014). Introducing an observational measure of standards-based mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 109-128.