

10-1-2019

## Development of an Instructional Process Based on Mathematical Modeling and Scaffolding Approaches to Enhance Mathematical Problem Solving and Representation Abilities of Lower Secondary School Students(การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น)

Kulnida Pluempitiwiriyawej

Aumporn Makanong

Follow this and additional works at: <https://digital.car.chula.ac.th/educujournal>

 Part of the [Education Commons](#)

### Recommended Citation

Pluempitiwiriyawej, Kulnida and Makanong, Aumporn (2019) "Development of an Instructional Process Based on Mathematical Modeling and Scaffolding Approaches to Enhance Mathematical Problem Solving and Representation Abilities of Lower Secondary School Students(การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น)," *Journal of Education Studies*: Vol. 47: Iss. 4, Article 5. Available at: <https://digital.car.chula.ac.th/educujournal/vol47/iss4/5>

This Article is brought to you for free and open access by Chula Digital Collections. It has been accepted for inclusion in Journal of Education Studies by an authorized editor of Chula Digital Collections. For more information, please contact [ChulaDC@car.chula.ac.th](mailto:ChulaDC@car.chula.ac.th).



การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์  
และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและ  
การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

Development of an Instructional Process Based on Mathematical Modeling and  
Scaffolding Approaches to Enhance Mathematical Problem Solving and  
Representation Abilities of Lower Secondary School Students

กุลนิดา ปลื้มปิติวิริยะเวช<sup>1</sup> และ อัมพร ม้าคอง<sup>2</sup>

Kulnida Pluempitiwiryawej and Aumporn Makanong

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) พัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ และ 2) ศึกษาคุณภาพกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นกลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม จำนวน 64 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 32 คนและกลุ่มควบคุม 32 คนใช้เวลาในการทดลอง 24 คาบ เป็นระยะเวลา 12 สัปดาห์ ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน คือ 1) การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 2) การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ข้อมูลใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบที

ผลการวิจัยพบว่า

1. กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน คือ 1) การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ 2) การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง 3) การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิง

Article Info: Received 15 May, 2017; Received in revised form 1 November, 2018; Accepted 11 September, 2019

<sup>1</sup> นิสิตดุขุบัณฑิตสาขาวิชาหลักสูตรและการสอน ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อีเมล: kullamaratee@hotmail.com  
Ph.D. Candidate in Curriculum and Instruction Division, Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education, Chulalongkorn University  
Email: kullamaratee@hotmail.com

<sup>2</sup> อาจารย์ประจำสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อีเมล: aumporn.m@chula.ac.th  
Lecturer in Mathematics Education Division, Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education, Chulalongkorn University  
Email: aumporn.m@chula.ac.th

ผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง 4) การประเมินแบบจำลองและการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง 5) การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่

2. หลังการทดลอง นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมีความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

**คำสำคัญ:** การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ / การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ / การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ / การเสริมต่อการเรียนรู้

### Abstract

The objectives of this research were 1) to develop instructional process based on mathematical modeling and scaffolding approaches and 2) to study the quality of instructional process based on mathematical modeling and scaffolding approaches. The target group were 7th to 9th graders in demonstration schools under the Office of the Higher Education Commission (OHEC) within Bangkok. Samples composed of 64 Mathayom 2 (the 8th grade) students from Chulalongkorn University Demonstration School: 32 in the experimental group and 32 in the control group. The experimental time were 24 periods of class in 12 weeks. There are 2 stages in the process, namely 1) development of instructional process based on mathematical modeling and scaffolding approaches 2) experiment of the teaching process. Research tools were the mathematical problem solving ability test and the mathematical representation ability test. Data were analysis by using arithmetic mean, standard deviation and t-test.

The findings were as follows:

1. The developed instructional process comprised of 5 steps: 1) proposing problems of interest, 2) determining the target and creating mathematical modeling, 3) solving the problem and referring the results to the real world environment, 4) evaluating the model and verifying the model, 5) extending the idea to new situations.

2. After the experiment, the experimental group had higher problem solving ability and mathematical representation ability than those of the control group at .05 significant level.

**KEYWORDS:** MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING / MATHEMATICAL REPRESENTATION / MATHEMATICAL MODELING / SCAFFOLDING

## บทนำ

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM) ได้กล่าวไว้ในหนังสือประจำปี ค.ศ. 1980: Problem solving in school Mathematics ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาเป็นจุดเน้นสำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ (Kulik & Reys, 1980) ซึ่งสอดคล้องกับเป้าหมายหลักของคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนมัธยมศึกษา คือ เพื่อให้ให้นักเรียนมีความรู้และมีเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการกำหนดวิธีการในการแก้ปัญหาในระดับที่สูงเกินกว่าการศึกษาของเขา โดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนระดับมัธยมศึกษาควรมีโอกาสในการทดลอง สร้าง และปรับปรุงปัญหาเพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาในชีวิตจริง เพราะปัญหาที่เกิดขึ้นในโลกแห่งความจริงนั้นมักประกอบด้วยองค์ประกอบที่ไม่เป็นระเบียบ ไม่สมบูรณ์ (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)

แม้ว่าความสามารถในการแก้ปัญหาจะเป็นความสามารถที่มีความจำเป็นในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แต่จากผลการประเมินระดับนานาชาติ แสดงให้เห็นว่านักเรียนที่ศึกษาในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานยังคงมีความสามารถในการแก้ปัญหาอยู่ในระดับที่ไม่น่าพึงพอใจนัก เห็นได้จากผลการประเมิน PISA (Programme for International Student Assessment) จากผู้ที่จบการศึกษาภาคบังคับหรือกลุ่มอายุ 15 ปี (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2553) มีผลการประเมินต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติทุกครั้ง และเมื่อพิจารณาจาก PISA 2000 จนถึง PISA 2012 พบว่า ในสามด้านที่ประเมิน ด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ยังคงมีแนวโน้มลดลง และที่สำคัญการรู้เรื่องคณิตศาสตร์มีคะแนนต่ำที่สุดในสามด้านที่ประเมิน ซึ่งในปี 2012 ปรากฏว่านักเรียนไทยมีคะแนน 427 คะแนน ซึ่งต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติ (OECD) 494 คะแนน ซึ่งเป็นข้อมูลที่ระบบการศึกษาโดยทั่วไปให้ความสำคัญมาก เพราะขึ้นไปถึงศักยภาพของพลเมืองในอนาคต (โครงการ PISA ประเทศไทย, 2554; สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2557)

นอกจากนี้ผลการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระดับนานาชาติ พ.ศ. 2554 (TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study 2011) ซึ่งเป็นโครงการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์

ของนักเรียนไทยเทียบกับนานาชาติ เพื่อประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษา ดำเนินการร่วมกับ ประเทศสมาชิกเพื่อประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ตามหลักสูตรของนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 (Grade 4) และมัธยมศึกษาปีที่ 2 (Grade 8) การประเมินเริ่มมีขึ้นในปี ค.ศ. 1995 และประเมินต่อเนื่องทุกสี่ปี จัดขึ้นโดยอาศัยความร่วมมือของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กับสมาคมนานาชาติเพื่อการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษา (International Association for the Evaluation of Educational Achievement: IEA) พบว่า ประเทศไทยมีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์เป็น 427 คะแนน ซึ่งคะแนนเฉลี่ยของนานาชาติมีค่าเป็น 500 คะแนน ประเทศไทย จัดอยู่ในลำดับที่ 28 จากประเทศที่เข้าร่วมโครงการ 45 ประเทศในระดับมัธยมศึกษา จึงถือว่า อยู่ในระดับต่ำ (Low international benchmark) ทั้งด้านเนื้อหาและด้านพฤติกรรมการเรียนรู้ และยังต่ำกว่าค่ากลางของการประเมินอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 และมีแนวโน้มของคะแนนเฉลี่ยลดลงอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน (โครงการ PISA ประเทศไทย, 2554; สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2557) ผลการประเมินระดับนานาชาติเป็นหลักฐานเชิงประจักษ์ที่ทำให้ระบบของประเทศไทยควรตระหนักในการปรับเปลี่ยนและพัฒนา การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานอย่างจริงจังและเร่งด่วน

รายงานผลการประเมินดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า ผลของการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยมีคุณภาพต่ำกว่าค่าเฉลี่ยของนานาชาติอย่างต่อเนื่อง โดยเฉพาะทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะสำคัญที่คนไทยมีอยู่ในระดับต่ำ (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และ คณะ, 2544) สอดคล้องกับผลงานวิจัยของ ชลธิชา ใจพนัส, อรุณา เจริญสุข, และ วิไลลักษณ์ ลังกา (2556) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับปัจจัยบางประการที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พบว่า ตัวแปรปัจจัยที่มีความสัมพันธ์ทางบวกกับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มากที่สุดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 คือ ความสามารถในการเปลี่ยนภาษาโจทย์เป็นภาษาคณิตศาสตร์ และสอดคล้องกับงานวิจัยของ อัมพร ม้าคนอง (2536) ที่ทำการศึกษาเกี่ยวกับการวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม พบว่า ความถี่ของข้อผิดพลาดด้านการตีความโจทย์นักเรียน คือ การนำข้อมูลมาใช้

ผิดมากที่สุด และรองลงมา คือ การแปลความหมายจากประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง

ข้อมูลดังกล่าวข้างต้นสอดคล้องกับงานวิจัยของ วัฒนิตา นำแสงวานิช (2539) ที่ผลของการแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม โดยการใช้แบบฝึกทักษะ พบว่า ข้อบกพร่องหนึ่งที่เกิดคือการแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ จะเห็นได้ว่าจากผลงานวิจัยข้างต้น พบว่าการแปลความหมายโจทย์ การตีความและการเปลี่ยนจากประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ยังคงเป็นอุปสรรคต่อการแก้ปัญหาของนักเรียนไทย เพราะวาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ต้องมีการฝึกฝนให้เกิดเป็นทักษะและต้องการพื้นฐานความรู้เบื้องต้นเพื่อเรียนในมโนทัศน์ในขั้นสูงขึ้น เรื่องราวต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ต้องใช้ความรู้ความเข้าใจของความหมายของคำหรือข้อความที่เป็นภาษาไทย ดังนั้นถ้าเข้าใจภาษาไทยได้ดีก็น่าจะตีความปัญหาโจทย์หรือเข้าใจความหมายของคำถามได้ดี (พินิจ ศรีจันทร์ดี, 2530) สอดคล้องกับงานวิจัยของ Cifarelli (1998) ที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแปลความหมายและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

Duval (1983, อ้างถึงใน Uzun & Arslan, 2009) ได้ให้นิยามของการตีความหรือการแปลความหมายโจทย์ปัญหาว่าเป็นความเข้าใจความหมายของมโนทัศน์และระบุความหมายที่เทียบเท่ากับการใช้ตัวแทนในรูปแบบที่แตกต่างกันของมโนทัศน์เดียวกันได้ นอกจากนี้การใช้ตัวแทนจะมีความสำคัญต่อครูแล้ว การใช้ตัวแทนยังมีความสำคัญต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน เป้าหมายทางการศึกษาที่สำคัญหนึ่งคือ เพื่อให้นักเรียนสามารถเรียนรู้รูปแบบต่าง ๆ ของการใช้ตัวแทนในการสื่อสารกับผู้อื่น (Greeno & Hall, 1997) โดยเฉพาะอย่างยิ่ง บทบาทของการใช้ตัวแทนที่ใช้ในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์แบบนามธรรมให้กลายเป็นประสบการณ์ที่สามารถจับต้องได้ของผู้เรียน (Harries & Barmby, 2011) และการใช้ตัวแทนยังสนับสนุนความจำที่ใช้งานอยู่ของผู้เรียน (Paivio, 1969)

แม้ว่าโครงสร้างการแก้ปัญหาจะยังไม่ชัดเจนนัก แต่คนทั่วไปกล่าวว่า การแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ต้องการการตีความโจทย์ (Interpretation) และการวิเคราะห์โจทย์ (Analysis) ซึ่งทั้งสองประการนี้อาจมีขั้นตอนเดียวหรือหลายขั้นตอนก็ได้ แต่ต้องสามารถระบุ

ได้ว่าสิ่งใดเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ โจทย์ปัญหาบางโจทย์อาจจะ มีทั้งข้อมูลที่เกี่ยวข้องและข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง โดย Mayer (1985, อ้างถึงใน Kingsdorf & Krawec, 2014) ได้เสนอแนวทางการแบ่งระยะของการแก้โจทย์ปัญหาไว้เป็น 4 ระยะ ได้แก่

1. ระยะการแปลโจทย์ (Translation phase)
2. ระยะการบูรณาการ (Integration phase)
3. ระยะการวางแผน (Planning phase)
4. ระยะการดำเนินการ (Execution phase)

ผลของงานวิจัยข้างต้น พบว่า ระยะที่เป็นอุปสรรคในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน ไทยเริ่มต้นตั้งแต่ระยะที่ 1 ที่นักเรียนไม่สามารถแปลโจทย์ได้ ทำให้นักเรียนไม่เข้าใจในสิ่งที่ โจทย์ถามหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา ดังนั้นจึงไม่สามารถเข้าสู่ระยะที่ 2 ที่เป็นการบูรณาการ องค์ความรู้ โมโนทัศน์ ทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีเพื่อเลือกใช้ยุทธวิธีในการ ดำเนินการได้ และไม่สามารถระบุขั้นตอนวางแผนวิธีการดำเนินการที่เลือกไว้จากขั้นตอนที่ 2 ไปสู่ระยะที่ 3 ได้ และท้ายที่สุดนักเรียนก็ไม่สามารถลงมือแก้ปัญหาได้จริงในระยะที่ 4 ทำให้นักเรียนไม่สามารถดำเนินการตั้งแต่ระยะที่ 1 ถึงระยะที่ 4 ได้อย่างลุล่วงสมบูรณ์ ในที่สุด นักเรียนจึงไม่ประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหา ซึ่งจากระยะที่ 1 และระยะที่ 2 เป็นระยะ ที่มีความสำคัญมาก เพราะนอกจากจะเป็นระยะเริ่มต้นแล้วยังประกอบด้วยการแปลโจทย์ และการพิจารณาเลือกใช้วิธีการแก้โจทย์ปัญหาที่เหมาะสมกับปัญหานั้น ๆ หากเกิดอุปสรรคขึ้น ในระยะนี้ก็จะทำให้นักเรียนดำเนินการต่อเนื่องไปยังระยะอื่นไม่ได้ ดังนั้นเราจึงควรให้ ความสนใจในการพัฒนากระบวนการเรียนที่ส่งเสริมความเข้าใจของนักเรียนในการแปล จากโจทย์ปัญหาไปสู่ประโยคสัญลักษณ์หรือภาษาทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เพื่อนำไปสู่ การแก้โจทย์ปัญหาให้ประสบผลสำเร็จได้อย่างสมบูรณ์

English and Lesh (2003) กล่าวว่า การสอนคณิตศาสตร์โดยครูผู้สอนนั้นเปิดโอกาส ให้นักเรียนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง โดยผ่านกระบวนการสร้าง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อดำเนินการแก้ปัญหานั้นจะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจปัญหา และสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่าการสอนแก้ปัญหากจากโจทย์ปัญหาแบบปกติ

เนื่องจากนักเรียนแต่ละคนมีความแตกต่างระหว่างบริบทของแต่ละบุคคลและมี ประสบการณ์เดิมที่ส่งผลขอบเขตการเรียนรู้ที่จำกัด ทำให้ความแตกต่างเหล่านี้มีผลต่อ ความยากง่ายต่อการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา การตีความ การแปล การสื่อสารความคิด

ออกมาเป็นตัวแทนคณิตศาสตร์และทำที่สุดยังต่อเนื่องไปถึงการแก้ปัญหาอีกด้วย ดังนั้นนักเรียนจึงควรได้รับการช่วยเหลือจากครูหรือเพื่อนที่มีความสามารถมากกว่านักเรียนก็จะสามารถประสบความสำเร็จในการเรียนรู้ของตนเองได้ในที่สุด ดังนั้นวิธีที่สามารถนำมาพัฒนาความสามารถของนักเรียนในครั้งนี้ คือ การจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffolding approach) (โคจิวัจน์ เสริฐศรี, 2553)

การเสริมต่อการเรียนรู้เป็นคำที่อยู่ในโลกของการศึกษาที่มีอยู่ในทฤษฎีของการเรียนรู้คอนสตรัคติวิสแนวใหม่ (Modern constructivist) การเสริมต่อการเรียนรู้จะมีบทบาทสำคัญมากในการพัฒนาเรียนรู้ของนักเรียน ทุกครั้งที่นักเรียนมาสู่ขั้นตอนการพัฒนาการเรียนรู้ในบางขั้นตอนซึ่งมีตัวชี้วัดความสำเร็จของการทำกิจกรรมนั้น ในบางสถานการณ์นักเรียนบางคนจะมีความต้องการการเสริมต่อการเรียนรู้ ซึ่งการเสริมต่อการเรียนรู้เป็นโมทัศน์ของการเรียนรู้ที่มีความช่วยเหลือ (Assisted learning) ในรูปแบบของสื่อการเรียนรู้ การเสริมต่อการเรียนรู้ในบทบาทมุมมองการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในห้องเรียนมีปฏิสัมพันธ์ได้หลากหลายรูปแบบ เช่น ระหว่างครูผู้สอนกับนักเรียนระหว่างนักเรียนกับนักเรียน ระหว่างนักเรียนกับสื่อการสอน โดยวัสดุสื่อที่ใช้สำหรับนักเรียนนั้นต้องมีพื้นฐานอยู่บนประสบการณ์เดิมของนักเรียนที่นักเรียนจะสามารถพัฒนาองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และกลยุทธ์ผ่านสื่อการเรียนรู้ที่ใช้เพื่อตอบสนองต่อปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับได้

การเสริมต่อการเรียนรู้เป็นสิ่งที่จัดหามาเพื่อช่วยเหลือในบางสิ่งในระหว่างช่วงแรกของการเรียนรู้ (Slavin and Davis, 2006) ครูผู้สอนหรือนักเรียนคนอื่น ๆ จะให้ความช่วยเหลือการเรียนรู้ของนักเรียนเพื่อให้นักเรียนสามารถบรรลุในโมทัศน์นั้น ๆ หรือสามารถปฏิบัติภาระงานทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับมอบหมายให้เสร็จสิ้นได้ ซึ่งแต่เดิมนักเรียนคนดังกล่าวไม่สามารถเข้าถึง ครูผู้สอนจะค่อย ๆ ให้อิสระแก่นักเรียนในการสำรวจความสามารถและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ลดความช่วยเหลือและให้โอกาสนักเรียนที่จะรับผิดชอบมากขึ้นหลังจากที่นักเรียนสามารถปฏิบัติสิ่งที่ต้องการเรียนรู้นั้นได้เองแล้ว ส่วนการที่จะนำการเสริมต่อการเรียนรู้ออกเมื่อใดและด้วยวิธีการใดนั้นจำเป็นต้องมีการวางแผนล่วงหน้า เช่น จะสอนให้เด็กหัดขี่จักรยานในช่วงแรกต้องมีล้อเสริมไม่ให้ล้ม เพื่อให้เด็กสามารถมุ่งความสนใจต่อวิธีการปั่นจักรยานโดยไม่จำเป็นต้องกังวลต่อการล้ม หลังจากนั้นเมื่อเด็กเรียนรู้การปั่นแล้วจึงจะสามารถนำล้อเสริมออกได้ แต่ทั้งนี้ก็ขึ้นอยู่กับเด็กแต่ละคนเพราะบางคนอาจ



ต้องการให้การช่วยเหลือสนับสนุนตลอดเวลาแต่สำหรับบางคนก็ไม่จำเป็น

สรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นงานที่บุคคลนั้น ๆ เผชิญอยู่และไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที แต่ต้องใช้ความรู้และความสามารถทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ไม่ว่าจะปัญหานั้นจะเกิดขึ้นในชีวิตจริงหรือเป็นสถานการณ์จำลองในห้องเรียนในรูปแบบของโจทย์ปัญหา ซึ่งเป็นสิ่งที่จำเป็นในการดำรงชีวิตและเป็นเป้าหมายสำคัญของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ นอกจากนี้ การแก้ปัญหายังเป็นสมรรถนะและทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และจากการค้นคว้าจากงานวิจัยต่าง ๆ พบว่า สิ่งหนึ่งที่จะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้นั้นคือ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพราะการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นการที่นักเรียนได้ใช้กระบวนการทางความคิด ประกอบกับความรู้โมทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในการเลือกตัวแทนของข้อมูล วิเคราะห์ความสัมพันธ์สถานการณ์ปัญหาเพื่อนำไปสู่การหาคำตอบและการทำงานร่วมกันของระบบของแบบจำลอง พร้อมทั้งตรวจสอบผลลัพธ์กับสภาพกับโลกแห่งความเป็นจริงว่าถูกต้องสอดคล้องกันหรือไม่ และในขณะที่นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นนั้น นักเรียนก็ยังต้องใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์มาใช้เป็นตัวแทนสถานการณ์หรือบริบทในโลกแห่งในการสื่อสารกลับไปกลับมาระหว่างโลกแห่งความคิดให้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปด้วยเสมอ ดังนั้นในขณะที่นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาใด ๆ นั้นนักเรียนก็จะได้ฝึกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์และส่งเสริมการแก้ปัญหาของนักเรียนไปด้วยพร้อมกัน

นอกจากนี้ งานวิจัยที่มีมาก่อนหน้ายังพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้การตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคนนั้นมีระดับที่ต่างกันดังนั้นหากจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยนำแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาบูรณาการกับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ จะสามารถเสริมสร้างศักยภาพของนักเรียนแต่ละคนตามสภาพจริงและน่าจะเหมาะสมที่จะนำมาใช้กับวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการใช้สติปัญญาและมีลักษณะเป็นนามธรรมทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และสร้างองค์ความรู้ที่มีความหมายโดยเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ ให้นักเรียนมีบทบาทในการคิดและตัดสินใจในการแก้ปัญหา เปิดโอกาสให้ครูผู้สอน เพื่อนร่วม

ชั้นเรียน ผู้ปกครอง หรือผู้ที่มีความรู้ทำหน้าที่เป็นผู้เสริมต่อความคิด เพื่อให้นักเรียนสามารถพัฒนาตนเองไปตามศักยภาพของตนเองที่ควรจะเป็น ดังนั้นผู้วิจัยจึงศึกษาการพัฒนาระบบการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหากับการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น โดยผลการวิจัยที่ได้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และครูผู้สอนคณิตศาสตร์ที่จะนำกระบวนการเรียนการสอนที่บูรณาการแนวคิดการสร้างแบบจำลองและแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพต่อไป

### วัตถุประสงค์

1. เพื่อพัฒนาระบบการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้
2. เพื่อศึกษาคุณภาพกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

### วิธีการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยและพัฒนา (Research and development)

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย คือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิตสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา เขตกรุงเทพมหานคร จำนวน 8 โรงเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองนี้ ผู้วิจัยเลือกนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียน สาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา เขต กรุงเทพมหานคร ภาคการศึกษาปลาย ปีการศึกษา 2559 จำนวน 2 ห้องเรียน 64 คน และมีการจัดนักเรียนแต่ละห้องแบบคละความสามารถ แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน 32 คน และกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน 32 คน โดยใช้การเลือกแบบเจาะจง

**ตาราง 1** การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

<p style="text-align: center;"><b>กลุ่มทดลอง</b></p> <p style="text-align: center;">(การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยใช้กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้)</p>	<p style="text-align: center;"><b>กลุ่มควบคุม</b></p> <p style="text-align: center;">(การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)</p>
<p>ครูจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรื่องที่จะเรียน โดยได้จัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการเรียนการสอนตามการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้ ซึ่งมี 5 ขั้นตอน ดังนี้</p> <p><b>ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ</b></p> <p>เป็นขั้นการนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริง พร้อมทั้งใช้คำถามในการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหากับความสอดคล้องกันของบริบทของนักเรียน และเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับปัญหา เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเรียนรู้อย่างมีความหมาย</p> <p><b>ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง</b></p> <p>เป็นขั้นการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้และความคิดพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายของแบบจำลองและลักษณะของแบบจำลองเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและบริบทของปัญหา</p> <p><b>ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง</b></p> <p>เป็นขั้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบเพื่อสรุปอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง และในขณะที่มีเสริมต่อการเรียนรู้ให้ความสนับสนุนช่วยเหลืออยู่นั้น ให้สังเกตพฤติกรรมบ่อนกลับของนักเรียน เพื่อหาวิธีการและช่วงเวลาที่เหมาะสมในการลดการช่วยเหลือลง มอบหมายนักเรียนได้ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง</p>	<p><b>ขั้นนำ</b></p> <p>ครูนำเข้าสู่บทเรียนด้วยการทบทวนพื้นฐานความรู้ที่จำเป็นต้องใช้ในการเรียนหรือจัดสถานการณ์ หรือใช้ถามคำถามเกี่ยวกับเรื่องที่จะเรียน</p> <p><b>ขั้นจัดกิจกรรมการเรียนการสอน</b></p> <p>ครูจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 ซึ่งส่งเสริมให้นักเรียนเน้นการคิด มีคุณภาพด้านความรู้ และมีทักษะที่จำเป็นสำหรับการดำรงชีวิตในสังคมที่มีการเปลี่ยนแปลงและแสวงหาความรู้เพื่อพัฒนาตนเองอย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมตามหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 2 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งจัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและนอกจากนี้ในหนังสือยังได้นำเสนอขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว ซึ่งมีขั้นตอนและแนวคิดดังนี้</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. อ่านและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ให้หา</li> <li>2. กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ยังไม่ทราบค่า</li> <li>3. นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาเขียนเป็นสัญลักษณ์โดยใช้ความรู้ในเรื่อง สมการกำลังสองตัวแปรเดียว</li> </ol>

ตาราง 1 (ต่อ) กรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
(การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยใช้กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้)	(การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)
<b>ขั้นตอนที่ 4 ประเมินแบบจำลอง</b>	4. แก้มการ
เป็นขั้นการเสริมต่อการเรียนรู้ให้เห็นถึงคุณภาพและลักษณะของแบบจำลอง ความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียนและความเหมาะสมกับบริบทของสถานการณ์ปัญหา ความสอดคล้องกันของลักษณะของสัญลักษณ์และองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละลายขาดหายไป เพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญของนักเรียนในทบทวนตนเองและสะท้อนคิด	5. ตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขในโจทย์ 6. สรุปคำตอบ
<b>ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่</b>	<b>ขั้นสรุป</b>
เป็นขั้นการนำเสนอสถานการณ์ใหม่ เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง	สรุปเนื้อหาสาระและความคิดรวบยอดที่ได้รับจากการทำกิจกรรม การสรุปในลักษณะต่าง ๆ เช่น ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปหรือทบทวนสิ่งที่ได้เรียนมาแล้วในคาบ

## ผลการวิจัย

### ตอนที่ 1 ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

#### 1. หลักการของกระบวนการเรียนการสอน

หลักการที่ 1 หลักการใช้ปัญหาเสมือนโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน

การนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนในโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ทำให้เกิดความต้องการทำความเข้าใจหรือค้นหาคำตอบของปัญหา และการเรียนรู้อย่างมีความหมาย การเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนโดยการสำรวจความรู้พื้นฐานเดิมเกี่ยวกับปัญหาและเสริมต่อข้อมูลพื้นฐานที่สำคัญ

ที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับบริบทของปัญหา

หลักการที่ 2 หลักการใช้การกำหนดเป้าหมายเพื่อแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง (The real world) ไปยังโลกแห่งความคิด (The conceptual world) การแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้ความสามารถพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่นักเรียนควรรู้ เพื่อกำหนดเป้าหมายและลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นให้สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน

หลักการที่ 3 หลักการดำเนินการตามแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อได้มาซึ่งผลลัพธ์ในโลกแห่งความจริง การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้และเสริมต่อการเรียนรู้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ มีการประเมินข้อมูลป้อนกลับของนักเรียนเพื่อที่จะค่อย ๆ ลดการช่วยเหลือลง และให้นักเรียนสามารถฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง สรุปรวตรวจสอบผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ แล้วจึงอ้างอิงข้อสรุปของผลลัพธ์นั้นกลับไปยังบริบทในโลกแห่งความจริง

หลักการที่ 4 หลักการทบทวนความคิดเพื่อประเมินการทำงานของตนเอง การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง การประเมินข้อดีและข้อบกพร่องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้ให้นักเรียนมองเห็นแง่มุมที่หลากหลายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น

หลักการที่ 5 หลักการประยุกต์ใช้การแก้ปัญหาที่หลากหลาย การประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นกับสถานการณ์หรือบริบทอื่น ๆ และการทำนายไปสู่ปัญหาในโลกแห่งความจริงอื่น ๆ ในอนาคต เพื่อให้เกิดการขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง

## 2. วัตถุประสงค์ของการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีวัตถุประสงค์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหา และการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

### 3. การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้ของกระบวนการเรียนการสอน

1) การวัดและการประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ก่อนการใช้กระบวนการเรียนการสอน ใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

2) การวัดและการประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังการใช้กระบวนการเรียนการสอน ใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

#### ตอนที่ 2 ประสิทธิภาพการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

1. การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม พบว่า หลังเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 และเมื่อพิจารณาในแต่ละองค์ประกอบ ทั้งสี่องค์ประกอบการแก้ปัญหามีเพียง 2 องค์ประกอบ คือ องค์ประกอบ การดำเนินการแก้ปัญหา และองค์ประกอบ การสรุปคำตอบและการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิดของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม

2. การเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม พบว่า หลังเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 และเมื่อพิจารณาในแต่ละองค์ประกอบ ทั้งสององค์ประกอบของการใช้ตัวแทน พบว่า องค์ประกอบ การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ และองค์ประกอบ การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม

### 3. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพเกี่ยวกับพัฒนาการ

1) พัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการวิเคราะห์ทำความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาได้อย่างลึกซึ้งสามารถเชื่อมโยงความรู้เดิมกับเงื่อนไขของปัญหาเพื่อวางแผนกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา สามารถดำเนินการตามแผนการที่วางไว้จนสามารถหาคำตอบของปัญหาได้ประสบความสำเร็จ นอกจากนี้ยังมีความละเอียดรอบคอบมากขึ้นในการตรวจสอบและทบทวนขั้นตอนการดำเนินการแก้ปัญหาที่ตนเชื่อว่ามีประสิทธิภาพหรือไม่ มีคำตอบที่มีความสมเหตุสมผลกับบริบทของปัญหาหรือไม่ และมีการพัฒนากลยุทธ์ในการบูรณาการความรู้และวางแผนการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น

2) พัฒนาการความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสมและหลากหลายมากขึ้น สามารถสื่อความหมายแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างสอดคล้องกับองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ และนำไปสู่ในการแก้ปัญหาได้อย่างมีระบบและมีประสิทธิภาพมากขึ้น นอกจากนี้นักเรียนแต่ละคนยังแสดงให้เห็นถึงจินตนาการและความถนัดของแต่ละบุคคลในการเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แต่ละรูปแบบ ทั้ง ภาพ กราฟ ตาราง ตัวแปร สัญลักษณ์ และข้อความทางคณิตศาสตร์

### การอภิปรายผล

#### 1. การอภิปรายผลจากการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีจุดเด่นที่แตกต่างจากกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติคือ

1) โจทย์ปัญหาที่นำเสนอให้นักเรียนเป็นปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริง (โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์) กระบวนการเรียนการสอนนี้จะนำเสนอปัญหาที่มีข้อมูลซับซ้อนหรืออาจจะให้ข้อมูลไม่สมบูรณ์ทำให้กระตุ้นความอยากรู้และท้าทายความคิดของนักเรียน

2) การแลกเปลี่ยนเรียนรู้ กระบวนการเรียนการสอนนี้ได้ฝึกให้นักเรียนแสดงออกความคิดเห็นของตนเองในการนำเสนอความคิดในการอภิปราย พร้อมทั้งส่งเสริมให้นักเรียนมีความมั่นใจ ในการกล้าคิดกล้าแสดงออก และฝึกทักษะการนำเสนออย่างสมเหตุสมผล

3) การช่วยเหลือซึ่งกันและกัน กระบวนการเรียนการสอนนี้ได้ให้บทบาทกับนักเรียนบางคนได้เป็นผู้ช่วยนำเสนอความคิดตนเองให้กับผู้อื่น และให้บทบาทกับนักเรียนบางคนได้เป็นผู้รับการช่วยเหลือคอยรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่นแล้วนำมาปรับใช้กับตัวเอง

4) การทบทวนตนเอง กระบวนการเรียนการสอนนี้ได้ให้นักเรียนได้ประเมินตนเอง พร้อมทั้งสะท้อนคิดอย่างสมเหตุสมผล ทำให้นักเรียนมีความละเอียดรอบคอบและระมัดระวังมากขึ้น

5) การประยุกต์ใช้ความรู้ กระบวนการเรียนการสอนนี้เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้ความรู้ความคิดกับสถานการณ์ที่มีการต่อยอดจากสถานการณ์เดิม โดยได้มีการขยายความคิดและเกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการคิดต่อไป

6) การพัฒนาและทำทายศักยภาพการจัดการเรียนการสอน ครูได้พัฒนาและทำทายศักยภาพตนเองตั้งแต่การเตรียมการสอนที่ต้องเตรียมปัญหา คำถามและประเด็นอภิปราย นอกจากนี้ขณะสอนยังต้องใช้ไหวพริบปฏิภาณในการช่วยเหลือนักเรียนให้เหมาะสมตามศักยภาพของนักเรียนแต่ละคน

หลักการของกระบวนการเรียนการสอนมีจุดเน้นที่สอดคล้องกับ Blum and Niss (1991) ที่กล่าวว่าการแก้ปัญหาในชีวิตจริงโดยใช้กระบวนการของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นปัญหาที่น่าสนใจ ไม่เป็นปัญหาซ้ำซาก และสามารถพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ และการสร้างแบบจำลองยังช่วยให้นักเรียนเข้าใจโลกได้ดีขึ้น ช่วยสนับสนุนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (แรงจูงใจ ความคิดรวบยอด ความเข้าใจ การรักษาไว้) ช่วยพัฒนาสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์อย่างหลากหลาย ช่วยพัฒนาเจตคติที่เหมาะสม และช่วยในการนำเสนอภาพที่เหมาะสมทางคณิตศาสตร์ (Blum & Ferri, 2009) ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนตามกระบวนการที่พัฒนาขึ้นนี้ ทำให้นักเรียนได้พัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจและนำเสนอความเข้าใจนั้นออกมาเป็นรูปธรรมสอดคล้องกับ Hiebert and Wearne (1992, อ้างถึงใน Bolden, Barmby, & Harries,



2013) ที่กล่าวว่า การทำความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้น ขึ้นอยู่กับการเป็นตัวแทนภายในของมโนทัศน์ซึ่งได้รับอิทธิพลจากการนำเสนอการเป็นตัวแทนภายนอกของมโนทัศน์นั้นต่อผู้เรียน และ Wood (1999, อ้างถึงใน Bolden et al., 2013) ยังกล่าวอีกว่าการทำความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์นั้นเกี่ยวข้องกับระบบของสัญลักษณ์หรือการเป็นตัวแทนนั่นเอง

นอกจากนี้ การจัดการเรียนการสอนยังเน้นการพัฒนาการแก้ปัญหาและการเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์อย่างค่อยเป็นค่อยไปตามขั้นตอนของแนวคิดของการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยเป็นการช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดของนักเรียนที่มีอยู่ เพื่อเชื่อมโยงไปยังเป้าหมายงานที่ต้องการให้ประสบความสำเร็จได้ตามศักยภาพของนักเรียนแต่ละคนซึ่งขึ้นอยู่กับพื้นที่รอยต่อพัฒนาการหรือระยะห่างระหว่างระดับของการพัฒนาจากระดับที่เป็นอยู่จริงไปยังระดับที่สามารถจะเป็นไปได้ และในที่สุดการเสริมต่อการเรียนรู้จำเป็นต้องลดบทบาทลง เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการทั้งหมดด้วยตนเอง โดยมีความจำเป็นที่จะต้องประเมินนักเรียนเพื่อวางแผนการณ่วงหน้าที่จะนำการเสริมต่อการเรียนรู้ออกเมื่อใดและด้วยวิธีการใด ซึ่งสอดคล้องกับ Slavin and Davis (2006) ที่กล่าวว่า การเสริมต่อการเรียนรู้เป็นสิ่งที่ดีจัดหามาเพื่อช่วยเหลือในบางสิ่งในระหว่างช่วงแรกของการเรียนรู้ ครูหรือนักเรียนคนอื่น ๆ จะให้ความช่วยเหลือการเรียนรู้ของนักเรียนเพื่อให้สามารถรอบรู้ในมโนทัศน์นั้น ๆ หรือสามารถปฏิบัติภาระงานทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับมอบหมายให้เสร็จสิ้นได้ ซึ่งแต่เดิมเป็นสิ่งที่นักเรียนคนดังกล่าวไม่สามารถเข้าถึงได้ ครูจะค่อย ๆ ให้อิสระแก่นักเรียนในการสำรวจความสามารถและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Machmud, 2011) และการที่ครูคอยให้ความช่วยเหลือ และทิ้งระยะเวลาจนนักเรียนสามารถปฏิบัติงานได้ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนค่อย ๆ ทำความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และได้พัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจนั้นด้วย

## 2. การอภิปรายคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน

### 2.1 การอภิปรายเกี่ยวกับผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เมื่อวิเคราะห์เปรียบเทียบเฉพาะคะแนนหลังเรียนจำแนกตามองค์ประกอบ

ของการแก้ปัญหาของทั้งสองกลุ่มพบว่า คะแนนเฉลี่ยของสององค์ประกอบแรกของกลุ่มทดลองไม่สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 ซึ่งเมื่อพิจารณาจากค่าเฉลี่ยในแต่ละองค์ประกอบของกลุ่มทดลองนั้นสูงกว่ากลุ่มควบคุมเพียงเล็กน้อยเท่านั้น นั่นคือในองค์ประกอบ การวิเคราะห์ปัญหา และการบูรณาการความรู้ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ จิรายุส สมานมิตร (2555) ที่ทำการศึกษาปัจจัย 5 ปัจจัย ได้แก่ ความวิตกกังวลในการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ การรับรู้ความสามารถของตนเองในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความถนัดทางการเรียนด้านภาษา ความถนัดทางการเรียนด้านเหตุผล และทักษะการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาใน ชั้นทำความเข้าใจปัญหา ชั้นการวางแผน การแก้ปัญหา ชั้นการดำเนินการตามแผน และชั้นการตรวจสอบผล พบว่า ในชั้นการทำความเข้าใจปัญหาและชั้นการวางแผนการแก้ปัญหานั้นมีปัจจัยจาก 3 ใน 5 ปัจจัยที่ส่งผลกระทบต่อ ส่วนขั้นตอนการดำเนินการตามแผน และชั้นการตรวจสอบผลนั้นมีปัจจัยเพียง 2 ใน 5 ปัจจัยที่ส่งผลกระทบต่อ ที่ระดับนัยสำคัญ .01 จะเห็นได้ชัดเจนว่าการพัฒนาองค์ประกอบของความสามารถในการแก้ปัญหาในองค์ประกอบ การวิเคราะห์ปัญหาและการบูรณาการความรู้ นั้น ต้องใช้ปัจจัยหลายด้านมากกว่าในองค์ประกอบ การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ

ในองค์ประกอบหลังสององค์ประกอบ คือ การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ และการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด พบว่า คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาหลังเรียนในองค์ประกอบดังกล่าวของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 เพราะกลุ่มทดลองได้ฝึก ได้รับการช่วยเหลือ ได้รับกระบวนการที่ค่อยเป็นค่อยไป สอดคล้องกับ Cai and Lester (2010) ซึ่งกล่าวว่าการที่จะช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาคือต้องยอมรับว่าความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนเป็นสิ่งที่ค่อย ๆ พัฒนาอย่างช้า ๆ ต้องการเวลาระยะยาวค่อย ๆ ทำโดยการนำเอาประสบการณ์เดิมทั้งในชีวิตจริงและความรู้ทางคณิตศาสตร์มาบูรณาการในการวางแผนการในการแก้ไข ปัญหาเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และมีการช่วยเหลือโดยการเสริมต่อการเรียนรู้ตามพื้นฐานและศักยภาพของนักเรียนแต่ละคน ทำให้นักเรียนสามารถดำเนินการแก้ปัญหามาตามที่ได้วางแผนไว้ได้ สามารถสรุปคำตอบได้ถูกต้อง สามารถทบทวนตนเองและสะท้อนคิดกระบวนการทำงานได้ด้วยตนเอง และมีความละเอียดรอบคอบและใช้เป็นเหตุเป็นผล

ในการแก้ปัญหาจนสำเร็จลุล่วง

## 2.2 การอภิปรายเกี่ยวกับผลการเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

เมื่อวิเคราะห์ในภาพรวมและวิเคราะห์จำแนกตามองค์ประกอบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นนี้เน้นการฝึกให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจและแสดงความเข้าใจที่ได้นั้นออกมาเป็นรูปธรรม สอดคล้องกับ Lesh, Landau, and Hamilton (1983) ที่ให้ คำจำกัดความโน้ตศน์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการแปลหรือการแปลงระหว่างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้ในหลากหลายรูปแบบ ดังนั้นเมื่อนักเรียนเกิดความเข้าใจอย่างลึกซึ้งและได้ทบทวนความเข้าใจก่อนจะนำเสนอ ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้้อย่างมีความหมายและได้ฝึกการแสดงความสัมพันธ์ทางความคิดทางคณิตศาสตร์หรือการใช้ตัวแทนอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสอดคล้องกับ Turker et al. (2010, อ้างถึงใน Been, 2016) มองว่า การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่ช่วยให้นักเรียนและครูสามารถพัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เพื่อที่จะหาแนวทางการแก้ปัญหาที่เราเจอในชีวิต และ Kaput (2002) ที่กล่าวว่า การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ถูกพิจารณาได้ว่าเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการสร้างความเข้าใจและใช้ในการสื่อสารข้อมูล และแสดงความเข้าใจ

### ข้อเสนอแนะ

#### ข้อเสนอแนะสำหรับการนำไปใช้

1.1 ครูควรมีความมุ่งมั่นและทุ่มเทในการเลือกโจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์เสมือนชีวิตจริงที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจและเกิดการเรียนรู้้อย่างมีความหมาย

1.2 ครูควรมีความเข้าใจต่อความหลากหลายของพื้นฐานของความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน และมีความอดทนในช่วงแรกของการจัดกระบวนการเรียนการสอนและพร้อมที่จะช่วยเหลือตามศักยภาพของนักเรียน

1.3 ครูควรสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนที่ท้าทายความคิด ช่วยให้นักเรียนกล้าแสดงความคิดเห็น มีความมั่นใจในตนเองในการแสดงเหตุผล

### ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งถัดไป

2.1 จากผลการวิจัยพบว่า หลังเรียนคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเมื่อจำแนกตามองค์ประกอบแล้วของกลุ่มทดลองไม่แตกต่างจากกลุ่มควบคุมในบางองค์ประกอบ และจากการศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้องมีปัจจัยอื่นที่มีผลต่อองค์ประกอบดังกล่าว ดังนั้น ในการวิจัยครั้งถัดไป ควรนำปัจจัยดังกล่าวมาบูรณาการกับการจัดการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น แล้วพัฒนาเป็นกระบวนการเรียนการสอนที่มีศักยภาพในการพัฒนาองค์ประกอบการแก้ปัญหาได้ทุกองค์ประกอบ

2.2 ควรมีการศึกษาผลของการใช้กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ที่มีผลต่อทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านอื่น ๆ เช่น ความสามารถในการให้เหตุผลและการพิสูจน์ความสามารถในการสื่อสาร ความสามารถในการเชื่อมโยง

2.3 เนื่องจากระดับการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์นั้นมีหลากหลายระดับดังนั้น ควรพัฒนากระบวนการเรียนการสอนที่ส่งเสริมการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายนี้

### รายการอ้างอิง

#### ภาษาไทย

โครงการ PISA ประเทศไทย. (2554). *ผลการประเมิน PISA 2009 การอ่านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์: บทสรุปเพื่อการบริหาร*. สืบค้นจาก <https://pisathailand.ipst.ac.th/isbn-9786167235141/>

จรรย์สุ สมานมิตร. (2555). *การศึกษปัจจัยบางประการที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สังกัด สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษานครปฐมเขต 1 (วิทยานิพนธ์ปริญญาโท)*. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.

- ชลธิชา ใจพนัส, อรุณา เจริญสุข, และ วิไลลักษณ์ ลังกา. (2556). ปัจจัยบางประการที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. *วารสารวิชาการ Veridian E-Journal*, 6(3), 286-304.
- พินิจ ศรีจันทร์ดี. (2530). องค์ประกอบบางประการที่สัมพันธ์ต่อผลสัมฤทธิ์ในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยรามคำแหง (รายงานวิจัย). คณะกรรมการส่งเสริมการวิจัย มหาวิทยาลัยรามคำแหง, กรุงเทพฯ.
- ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และ คณะ. (2544). กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์กรณีศึกษานักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น (รายงานวิจัย). คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.
- วัฒน์ดา นำแสงวานิช. (2539). ผลของการแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เรื่อง เศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้แบบฝึกทักษะ (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- โคจิวัจน์ เสริฐศรี. (2553). การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา. (2553). *แผนการศึกษาแห่งชาติ ฉบับปรับปรุง (พ.ศ. 2552-2559)*. กรุงเทพฯ: พริกหวานกราฟฟิค.
- สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา. (2557). *สภาวการณ์การศึกษาไทยในเวทีโลก ปี 2557*. กรุงเทพฯ: พริกหวานกราฟฟิค.
- อัมพร ม้าคนอง. (2536). การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (รายงานผลการวิจัย). กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

## ภาษาอังกฤษ

- Been, A. L. (2016). *Teacher views of mathematical modeling*. Tucson, AZ: The University of Arizona.
- Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in Mathematics*, 22(1), 37-68.
- Bolden, D., Barmby, P., & Harries, T. (2013). A representational approach to developing primary ITT students' confidence in their mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(1), 70-83.
- Cai, J., & Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning*. Retrieved from [https://www.nctm.org/uploadedFiles/Research\\_and\\_Advocacy/research\\_brief\\_and\\_clips/Research\\_brief\\_14\\_-\\_Problem\\_Solving.pdf](https://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_14_-_Problem_Solving.pdf)
- Cifarelli, V. V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 239-264.
- English, L., & Lesh, R. (2003). Ends-in-view problems. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 297-316). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Greeno, J. G., & Hall, R. B. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, 79, 361-367.
- Harries, T., & Barmby, P. (2011). The importance of using representations to help primary pupils give meaning to numerical concepts. Retrieved from

<https://directorymathsed.net/download/Harris.pdf>

- Kaput, J. J. (2002). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. V. Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht: Springer.
- Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 29*(2), 66–74.
- Krulik, S., & Reys, R. E. (1980). *Problem solving in school mathematics: 1980 yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving. In R. Lesh (Ed.), *The acquisition of mathematical concepts and processes*. New York: Academic.
- Machmud, T. (2011). Scaffolding strategy. In mathematics learning. In *Proceeding international seminar and the fourth national conference on mathematics education* (pp. 429-440). Yogyakarta: Department of Mathematics Education, Yogyakarta State University.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and standards for school mathematics: National council of teachers of mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Paivio, A. (1969). Mental imagery in associative learning and memory. *Psychological Review, 76*(3), 241-263.
- Slavin, R. E., & Davis, N. (2006). *Educational psychology: Theory and practice* (8th ed.). Boston: Pearson/Allyn & Bacon.
- Uzun, S. Ç., & Arslan, S. (2009). Semiotic representations skills of prospective elementary teachers related to mathematical concepts. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 741-745.