Journal of Education Studies

Volume 45
Issue 2 *April - June 2017*

Article 16

4-1-2017

# การเรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านปัญหาในชีวิตจริงที่เน้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ศันสนีย์ เณรเทียน

# การเรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านปัญหาในชีวิตจริงที่เน้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

# Mathematics Learning with Real-World Problems Based on Mathematical Modeling

*ศันสนีย์ เณรเทียน*

## บทคัดย่อ

ทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นเป้าหมายสำคัญของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ในขณะที่ทักษะการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนเห็นความเชื่อมโยงของความรู้คณิตศาสตร์กับชีวิตจริงและเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย การพัฒนาทักษะทั้งสองให้เกิดขึ้นกับผู้เรียนจึงเป็นสิ่งสำคัญ แนวทางหนึ่งที่สามารถช่วยพัฒนา คือ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นกระบวนการในการแก้ปัญหาที่สามารถนำไปใช้ในกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เน้นให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหาในชีวิตจริงโดยใช้ความรู้และวิธีการทางคณิตศาสตร์ เริ่มจากการให้ผู้เรียนเผชิญปัญหาที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงที่ผู้เรียนต้องใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการคิดเพื่อแก้ปัญหา โดยผู้เรียนต้องมีการแปลงสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง ให้เป็นสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบเชิงคณิตศาสตร์ และนำคำตอบที่ได้ไปแปลงเป็นคำตอบปัญหาในชีวิตจริง ทั้งนี้ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นแนวทางที่สามารถนำไปใช้ได้กับผู้เรียนในทุกระดับชั้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา นักการศึกษาคณิตศาสตร์ได้ออกแบบขั้นตอนหรือวงจรของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไว้อย่างหลากหลาย โดยในบทความนี้จะนำเสนอวงจรของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์บางวงจร พร้อมยกตัวอย่างประกอบ โดยตัวอย่างปัญหาในชีวิตจริงที่นำเสนอ เป็นปัญหาที่ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาในการแก้ปัญหา เพื่อจะเป็นประโยชน์ต่อครูผู้สอนที่จะนำไปปรับใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับบริบทไทย

**คำสำคัญ:** การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์/ปัญหาคณิตศาสตร์/ปัญหาในชีวิตจริง/ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

## Abstract

The mathematical problem-solving skill is the major goal of teaching and learning mathematics. The mathematical connection skill is useful for students to bring out the connection between mathematical knowledge and the real-world context, and to contribute meaningful learning in mathematics. One approach to enhance both mathematical skills is called mathematical modeling. This is a problem solving process that can be implied in mathematics learning activities emphasizing students' engagement through solving real-world problems by mathematical knowledge and procedures. Starting with, students are aroused to solve real-world problems by using mathematical modeling. In the beginning of the solution process, students need to understand and simplify a real-world problem, and then transfer it to be a mathematical problem. After that, the student solves the mathematical problem by formulating a mathematical model, applying mathematical procedure, finding the mathematical result, and interpreting the mathematical result into a real result, respectively. Mathematical modeling is an approach that can be applied to all levels of education, especially at the elementary and secondary levels. Many mathematical educators suggest many modeling processes or modeling cycles to correspond with mathematical modeling. In this article, some of these modeling cycles are described with or without the examples of modeling problems. The background to mathematical knowledge to solve the examples of modeling problems presented in this article are based on those of secondary level. The body of knowledge of this article is shown in order to support mathematics teachers, who utilize it for designing mathematics learning activities in the Thai context.


**KEYWORDS:** MATHEMATICAL MODELING / MATHEMATICAL PROBLEM / REAL-WORLD PROBLEM / MATHEMATICAL MODEL

## บทนำ

หากท่านไปซื้อสินค้าในห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่ง และไปที่เคาน์เตอร์เก็บเงิน พนักงานเก็บเงินบอกกับท่านว่า “วันนี้มีโปรโมชันลด 3% นะคะ ปกติจะยิงบาร์โค้ดรวมราคา แล้วค่อยลดตอนท้ายครั้งเดียว แต่พิเศษสำหรับคุณลูกค้า หนูจะคิดแยกลด 3% ทีละชิ้นให้ จะได้ลดมากกว่าเดิม” ท่านคิดอย่างไรกับคำพูดนี้ หากรับฟังแบบเร็ว ๆ หลายคนอาจเผลอเห็นด้วยกับคำพูดดังกล่าว เพราะรู้สึกว่ามีการลดราคาสินค้า 3% หลาย ๆ ครั้ง แต่หากเมื่อได้ไตร่ตรองคำพูดดังกล่าว จะพบว่า ไม่ว่าคิดราคาด้วยวิธีใดก็จะได้ส่วนลดเท่ากันเมื่อคิดคำนวณโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เปอร์เซ็นต์ สถานการณ์นี้เป็นสถานการณ์หนึ่งที่เป็นการใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันที่เห็นได้ง่าย และสะท้อนให้เห็นว่าการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ต้องพัฒนาผู้เรียนให้เป็นบุคคลที่มีประสิทธิภาพในการดำรงชีวิตและการก้าวสู่การประกอบอาชีพการงานอย่างมีคุณภาพ ทำให้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ต้องเน้นพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นเป้าหมายสำคัญของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์และพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์โดยเฉพาะการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตจริงให้เกิดขึ้นกับผู้เรียนควบคู่ไปด้วยกัน

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นให้ผู้เรียนได้เห็นประโยชน์ของการใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง เห็นการนำความรู้คณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงและประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง จะทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมายและเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ จากการศึกษางานวิจัยทางการศึกษาคณิตศาสตร์ทั้งในประเทศและต่างประเทศ พบว่า กระบวนการจัดการเรียนการรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นพัฒนาผู้เรียนผ่านปัญหาในชีวิตจริง และใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ไม่ว่าจะเป็น model-eliciting activities (MEAs), real mathematics education (RME), problem-based learning, mathematical modeling จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ หากผู้สอนออกแบบการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่มีภาระงานหรือชิ้นงานที่ผู้เรียนได้เห็นความสัมพันธ์ของคณิตศาสตร์กับชีวิตจริงและใช้กระบวนการเหล่านี้ในการจัดการเรียนการสอนอย่างต่อเนื่องจะช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาจนเกิดทักษะการแก้ปัญหาและทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ในที่สุด

ในบทความนี้จะนำเสนอแนวทางหนึ่งของการจัดการเรียนการรู้คณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหาในชีวิตจริง คือ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical modeling) โดยปัญหาในชีวิตจริงในที่นี้จะหมายรวมถึงปัญหาในชีวิตประจำวัน ปัญหาในศาสตร์อื่น ๆ และปัญหาในโลกจริง เพื่อเป็นแนวทางสำหรับครูผู้สอนที่จะนำไปปรับใช้ในการจัดการเรียนการรู้คณิตศาสตร์ในบริบทไทย เพื่อพัฒนาทักษะทั้งสองที่กล่าวมาข้างต้น

## ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง

หากกล่าวถึงปัญหาทางคณิตศาสตร์ (mathematical problems) จะหมายถึง สถานการณ์เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการหาคำตอบ ซึ่งยังไม่รู้วิธีการได้มาซึ่งคำตอบในทันที โดยทั่วไปปัญหาคณิตศาสตร์จะจัดถูกจัดแบ่งเป็นประเภทตามเกณฑ์ที่กำหนด เช่น หากจัดแบ่งปัญหา

โดยพิจารณาจากผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของปัญหาเป็นหลัก (Baroody & Coslick, 1993; ทรงชัย อักษรคิด, 2555; Reys, Lindquist, Lambdin & Smith, 2014) จะแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาที่คุ้นเคย (routine problems) หมายถึง ปัญหาที่สามารถแก้ได้ด้วยวิธีการที่คุ้นเคย หรือสามารถแก้ได้โดยการทำตามวิธีการที่ได้เรียนทีละขั้นตอน

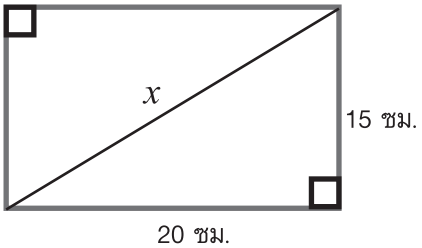
2. ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (non-routine problems) หมายถึง ปัญหาที่ไม่รู้วิธีการในการแก้ ต้องลงมือทำและอาจต้องได้รับการแนะนำในการแก้ปัญหา หรือปัญหาที่ต้องประยุกต์วิธีการที่เรียนไปใช้ในการแก้ตั้งแต่ 2 ขั้นตอนขึ้นไป

แต่หากจำแนกประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามระดับความเชื่อมโยงกับชีวิตจริง จะแบ่งได้เป็น 3 ประเภท (Krug & Schukajlow, 2013; Schukajlow et al., 2012) ดังนี้

1. ปัญหาภายในคณิตศาสตร์ (intra-mathematical problems) หมายถึง โจทย์คณิตศาสตร์ที่ไม่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง สามารถแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้ ขั้นตอนหรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น

ปัญหาที่ 1 จงหาค่า $x$ ในสัดส่วน $\frac{15}{x} = \frac{10}{3}$

ปัญหาที่ 2 จากรูปต่อไปนี้ จงหาค่า $x$



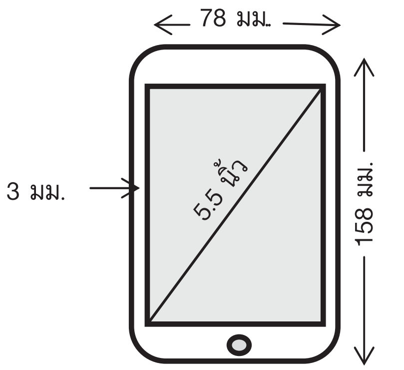

ปัญหาที่ 1 เป็นปัญหาที่ใช้ความรู้เรื่องสัดส่วน สามารถคำนวณค่าของตัวแปรได้โดยตรงจากการคูณไขว้ และ

ปัญหาที่ 2 เป็นปัญหาที่ใช้ความรู้เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ในการค่า $x$ ได้จาก $x^2 = 15^2 + 20^2$

2. ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ (“dressed up” word problems) หมายถึง ปัญหาที่เป็นเรื่องราวในชีวิตจริง หรือมีบริบทเสมือนจริง ที่สถานการณ์ปัญหาจะสอดแทรกข้อมูลที่จำเป็นและเพียงพอที่เลือกความรู้ วิธีการหรือกลวิธีทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา จนนำไปสู่คำตอบของปัญหาได้ ตัวอย่างเช่น

ปัญหาที่ 3 โทรศัพท์มือถือยี่ห้อหนึ่ง มีความยาว ความกว้าง และความหนาของตัวเครื่องเป็น 158, 78 และ 7.5 มิลลิเมตรตามลำดับ และมีหน้าจอแสดงผลเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 5.5 นิ้ว หากขอบด้านข้างของหน้าจอแสดงผลแต่ละข้างกว้าง 3 มิลลิเมตร หน้าจอแสดงผลนี้จะมีความยาวกี่มิลลิเมตร

ปัญหาที่ 3 เป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลจริงของโทรศัพท์มือถือยี่ห้อหนึ่ง โดยปัญหาต้องการให้หาความยาวของหน้าจอแสดงผลว่ายาวกี่มิลลิเมตร รวมถึงปัญหานี้ได้กำหนดข้อมูลที่จำเป็นและเพียงพอที่จะเลือกความรู้ วิธีการหรือกลวิธีทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ คือ ขนาดของตัวเครื่องเป็น 158 × 78 × 7.5 มิลลิเมตร ขนาดหน้าจอแสดงผลเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 5.5 นิ้ว และขอบด้านข้างของหน้าจอแสดงผลแต่ละข้างกว้าง 3 มิลลิเมตร สามารถวาดรูปประกอบได้เป็น




เมื่อพิจารณาข้อมูลข้างต้น สามารถเชื่อมโยงไปสู่การเลือกความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสและการเปลี่ยนหน่วยการวัด มากำหนดแนวทางการแก้ปัญหาที่นำไปสู่คำตอบของปัญหา ทั้งนี้ในการคำนวณต้องใช้เครื่องช่วยคิดคำนวณในการหาค่าต่าง ๆ และค่าที่ได้จะเป็นค่าประมาณ

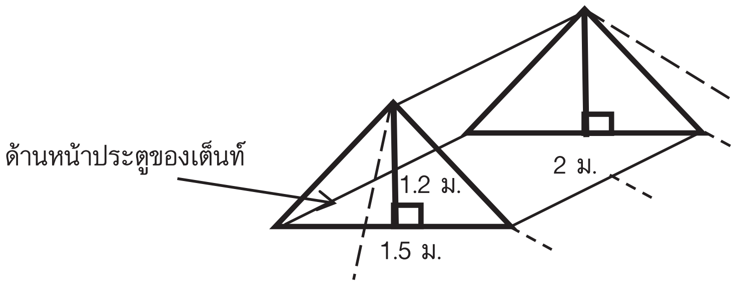
ปัญหาที่ 4 ร้านค้าแห่งหนึ่งจัดโปรโมชัน “ลด 5% ทั้งร้าน” เป็นวันสุดท้าย โทรทัศน์ SMART LED TV ยี่ห้อหนึ่ง ขนาด 32 นิ้ว ติดป้ายราคาขายไว้ 11,900 บาท อยากทราบว่าหากต้องการซื้อโทรทัศน์ยี่ห้อนี้หลังจากวันนี้จะต้องซื้อในราคาเท่าใด

ปัญหาที่ 4 เป็นสถานการณ์ที่ปรากฏในชีวิตประจำวันที่ผู้เรียนพบได้เป็นเหตุการณ์ที่ต้องตัดสินใจว่าถ้าไม่ซื้อในวันสุดท้ายของการลด 5% นี้ จะต้องจ่ายเงินซื้อสินค้าเป็นราคาเท่าใด ซึ่งผู้เรียนต้องอ่านทำความเข้าใจปัญหา โดยปัญหาได้กำหนดข้อมูลสำคัญที่จำเป็นและเพียงพอในการแก้ปัญหา คือ ราคาขาย 11,900 บาท และส่วนลด 5% นำมาสู่การเลือกความรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง สัดส่วน มาแก้ปัญหาและคำนวณหาคำตอบที่ต้องการ

3. ปัญหาแบบจำลอง (modeling problems) หมายถึง ปัญหาในชีวิตจริงที่ต้องมีการจำลองสถานการณ์ปัญหาให้สามารถใช้ความรู้คณิตศาสตร์และสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เช่น สมการ อสมการ ฟังก์ชัน ตัวแปร กราฟ ในการแก้ปัญหา และนำคำตอบที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ไปปรับให้เหมาะสมกับปัญหาในชีวิตจริง ตัวอย่างเช่น

ปัญหาที่ 5 ในการออกค่ายพักแรมลูกเสือ นักเรียนต้องเตรียมเต็นท์พักแรมสำหรับ 2-3 คน เป็นเต็นท์รูปสามเหลี่ยม ที่มีความยาว ความกว้าง และความสูงเป็น 2, 1.5 และ 1.2 เมตร ตามลำดับ พร้อมทั้งอุปกรณ์ต่าง ๆ เช่น ผ้าเต็นท์ เชือก ผ้ารองพื้น สมอบก ต้องการทราบว่านักเรียนต้องเตรียมเชือกขึงเพื่อการยึดเต็นท์จำนวนกี่เส้น และความยาวเชือกแต่ละเส้นเป็นกี่เมตร

ปัญหาที่ 5 เป็นปัญหาในชีวิตจริงเกี่ยวกับการเตรียมอุปกรณ์เต็นท์พักแรม ซึ่งมีข้อมูลจำเป็นบางอย่างที่ปัญหาไม่ได้กำหนดมาให้ คือ ลักษณะของเต็นท์รูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีหลายแบบ แต่ละแบบจะมีตำแหน่งการขึงเชือกต่างกัน ซึ่งจะมีผลต่อการคำนวณจำนวนเชือกและความยาวของเชือกที่ปัญหาต้องการทราบ ดังนั้นการแก้ปัญหาข้อนี้จึงต้องเลือกลักษณะเต็นท์รูปสามเหลี่ยมที่ต้องการเพื่อนำมาจำลองสถานการณ์ของปัญหาให้ชัดเจนขึ้น รวมถึงกำหนดข้อมูลหรือเงื่อนไขเพิ่มเติมที่จะนำไปสู่การกำหนดตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาต่อไป สำหรับปัญหานี้ หากเลือกลักษณะเต็นท์รูปสามเหลี่ยม ดังรูป




จะพบว่าสามารถกำหนดข้อมูลหรือเงื่อนไขเพิ่มเติมได้ คือ ตำแหน่งของการขึงเชือกด้านหน้าประตูสองฝั่งกับตัวยึดโครงเต็นท์ 2 จุด และตำแหน่งของขึงเชือกด้านข้างกับชายผ้าของเต็นท์ ข้างละ 3 จุด นอกจากนี้ลักษณะด้านหน้าประตูของเต็นท์มีโครงเต็นท์หน้าประตูทั้งสองฝั่งที่มีความสูงเท่ากับความสูงของเต็นท์ คือ 1.2 เมตร แทนเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีความยาวฐานเป็นความกว้างของเต็นท์ คือ 1.5 เมตร จากข้อมูลต่าง ๆ ข้างต้น ทำให้สามารถใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งคำตอบที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ คือ ความยาวของเชือกด้านหน้าประตูและความยาวของเชือกด้านข้าง ทั้งนี้ความยาวของเชือกที่หาได้ทั้งหมดจะไม่ใช่คำตอบของปัญหาในชีวิตจริงหรือคำตอบที่เหมาะสมกับปัญหา จึงจำเป็นต้องมีการปรับคำตอบนั้นให้เหมาะสมกับสภาพจริงต่อไป

ปัญหาที่ 6 ข้าวสารหนึ่งล้านเมล็ดหนักเท่าไร

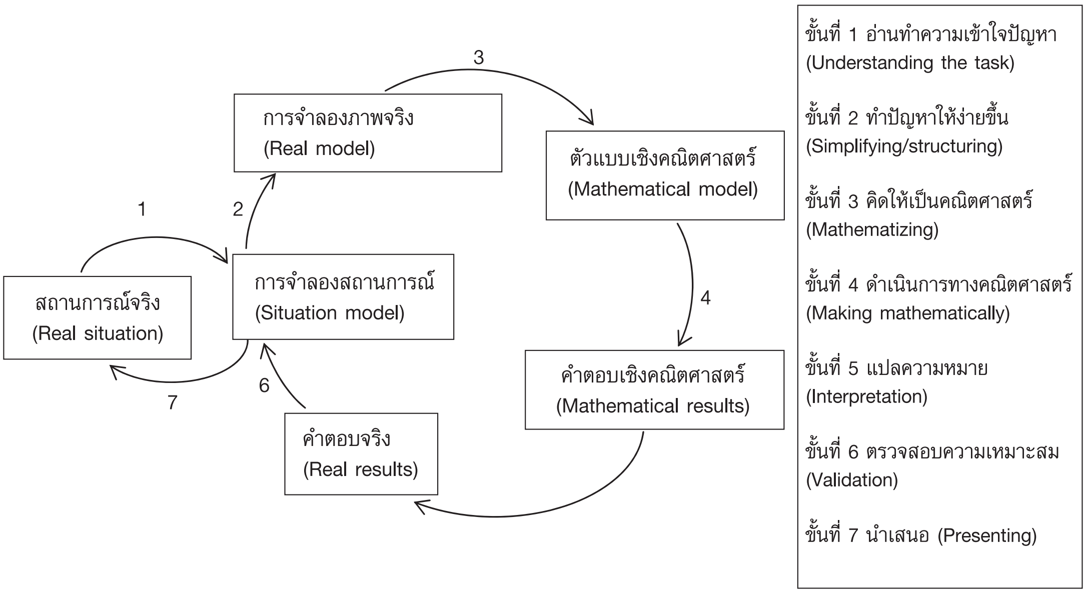
ปัญหาที่ 6 เป็นปัญหาที่ผู้เรียนต้องจำลองสถานการณ์ให้ง่ายขึ้น เพราะผู้เรียนไม่สามารถนับข้าวสารจำนวนหนึ่งล้านเมล็ดได้จริงและนำมาชั่งน้ำหนัก โดยการใช้การชั่งน้ำหนักของข้าวสารจำนวนไม่มากนักแทน จากนั้นจึงนับจำนวนข้าวสาร เช่น ข้าวสารน้ำหนัก 5.65 กรัม นับได้จำนวน 190 เมล็ด จากนั้นเลือกความรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง สัดส่วน ในการประมาณน้ำหนักข้าวสารหนึ่งล้านเมล็ด เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเป็น $\frac{5.65}{190} = \frac{x}{1,000,000}$ เมื่อกำหนดให้ $x$ แทนน้ำหนักข้าวสารหนึ่งล้านเมล็ดและดำเนินการคำนวณหาค่า $x$ จะได้น้ำหนักข้าวสารหนึ่งล้านเมล็ดประมาณ 29,736.84 กรัม

เนื่องจากสิ่งที่ต้องการหาจากปัญหาที่ 5 และปัญหาที่ 6 ไม่สามารถคิดคำนวณได้โดยง่าย บางครั้งผู้สอนอาจเปิดโอกาสให้ผู้เรียนใช้เครื่องช่วยคิดคำนวณ เพราะการแก้โจทย์ปัญหาลักษณะนี้มีความสำคัญอยู่ที่วิธีการได้มาซึ่งคำตอบ

เมื่อพิจารณาปัญหาทั้งสามประเภทข้างต้น จะเห็นว่าปัญหาประเภทที่ 1 และปัญหาประเภทที่ 2 เป็นปัญหาที่ผู้เรียนพบเจอจากการเรียนการสอนในห้องเรียนและจากในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ขณะที่ปัญหาประเภทที่ 3 ผู้เรียนจะไม่ค่อยมีโอกาสพบ ซึ่งจะเห็นว่าในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่มีการใช้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง แต่เป็นลักษณะของการปรับบริบทให้เหมาะสมเพื่อเอื้อให้อ่านและทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาและใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาได้ชัดเจนเกินไปจนไม่เห็นความเป็นชีวิตจริง ทำให้ผู้เรียนขาดตัวอย่างของปัญหาในชีวิตจริงที่ไม่สามารถนำความรู้คณิตศาสตร์ไปช่วยหาคำตอบที่ถูกต้องได้โดยตรง แต่จะใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในการอธิบายและหาคำตอบจากสถานการณ์ปัญหาที่มีการปรับให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วจึงนำคำตอบที่ได้ไปอธิบายคำตอบของปัญหาในชีวิตจริง ดังนั้นสิ่งหนึ่งที่แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างสำหรับปัญหาประเภทที่ 3 กับปัญหาประเภทอื่น ๆ ก็คือ กระบวนการที่จะใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในหัวข้อต่อไปจะนำเสนอกระบวนการหนึ่งที่ใช้ในการแก้ปัญหาประเภทนี้

## การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

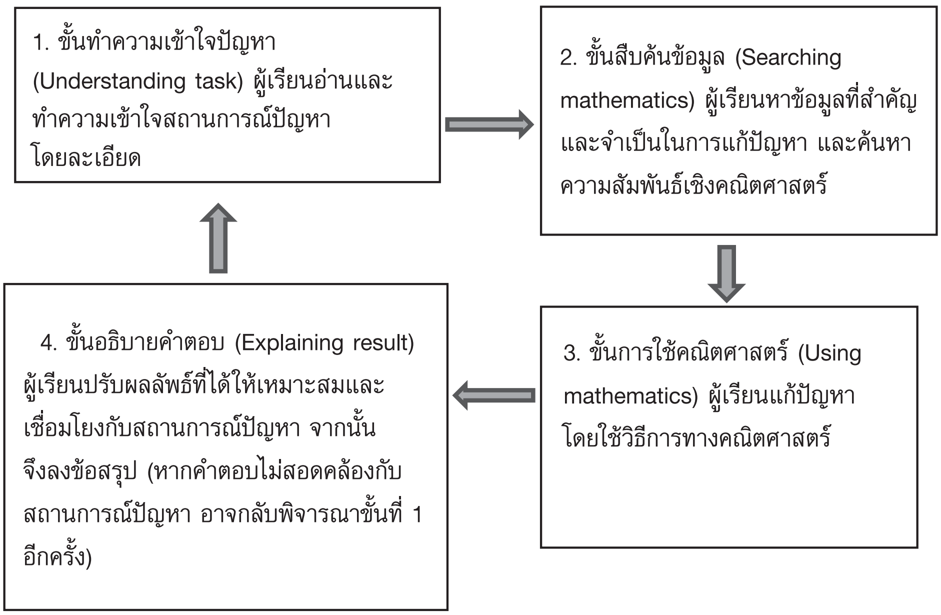
การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการในการแก้ปัญหาในชีวิตจริงโดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ ด้วยการจำลองปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ และใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบ และนำคำตอบที่ได้ไปตอบปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งนักการศึกษาคณิตศาสตร์ได้ออกแบบกระบวนของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (modeling process) ไว้อย่างหลากหลาย กระบวนการหนึ่ง คือ วงจรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ Blum (2011) ประกอบด้วย 7 ขั้นตอน ดังรูป



## อธิบายโดยสังเขปได้ดังนี้

กระบวนการเริ่มจากการให้สถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง และอ่านทำความเข้าใจปัญหาตามกระบวนการในขั้นที่ 1 โดยพิจารณาสถานการณ์จริงที่เกิดขึ้นรวมถึงข้อคำถามของปัญหาโดยละเอียด ต่อมาในขั้นที่ 2 ทำปัญหาให้ง่ายขึ้น เป็นขั้นที่มีการกำหนดเงื่อนไขและขอบเขตของสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา (การจำลองสถานการณ์) และนำสิ่งที่จำลองได้มานำเสนอข้อมูลให้เห็นภาพจริงชัดเจนมากขึ้น (การจำลองภาพจริง) จากนั้นขั้นที่ 3 คิดให้เป็นคณิตศาสตร์ เป็นขั้นที่ต้องจัดการข้อมูลที่ได้ให้อยู่ในรูปตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นที่ 4 ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เป็นขั้นที่ดำเนินการหาคำตอบเชิงคณิตศาสตร์จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้ ต่อมาขั้นที่ 5 แปลความหมาย เป็นขั้นที่ต้องนำคำตอบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้ไปแปลความให้มีความสอดคล้องกับบริบทในชีวิตจริง (คำตอบจริง) ขั้นที่ 6 ตรวจสอบความเหมาะสม เป็นขั้นที่มีการตรวจสอบความเหมาะสมของคำตอบที่ได้เมื่อเทียบกับเงื่อนไขและขอบเขตของสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา และขั้นที่ 7 นำเสนอ เป็นขั้นที่นำเสนอคำตอบที่ได้มาเพื่ออธิบายสถานการณ์จริงที่กำหนดไว้

ต่อมา Schukajlow, Kolter and Blum (2015) ได้ปรับวงจรข้างต้นให้กระชับขึ้นเป็น 4 ขั้นตอน และยังสามารถนำไปใช้กับการแก้ปัญหาแบบอื่น ๆ ได้เช่นกัน ดังรูป



นอกจากวงจรการสร้างแบบจำลองทั้งสองนี้ ยังมีวงจรหรือกระบวนจากนักการศึกษาคณิตศาสตร์อื่นๆ เช่น วงจรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 6 ขั้นตอนของ Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2010, อ้างถึงใน Anhalt & Cortez, 2015) วงจรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 4 ขั้นตอนของ Dossey, McCrone, Giordano, and Weir (2002, อ้างถึงใน Cirillo, Pelesko, Felton-Koestler & Rubel, 2016) ซึ่งจากการวิเคราะห์จุดเน้นที่มีร่วมกันของวงจรหรือกระบวนการเหล่านั้น จะพบจุดเน้นที่มีร่วมกัน คือ 1. การทำความเข้าใจปัญหาที่เน้นการค้นหาและตีความข้อมูลสำคัญ 2. การกำหนดข้อมูลและเงื่อนไขของปัญหาเพิ่มเติมให้ชัดเจนที่ทำให้สามารถเลือกใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา 3. การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบทางคณิตศาสตร์จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ 4. การแปลความคำตอบทางคณิตศาสตร์ไปสู่คำตอบของสถานการณ์ปัญหา และ 5. การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบและสรุปคำตอบของสถานการณ์ปัญหา

## การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

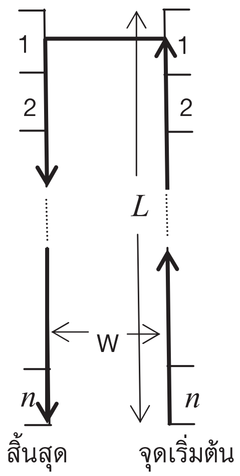
ในหัวข้อนี้ จะขอยกตัวอย่างการใช้กระบวนการตามวงจรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งสองวงจรข้างต้นในการแก้ปัญหา เพื่อให้เกิดความเข้าใจในแต่ละกระบวนการให้ชัดเจนมากขึ้นและผู้สอนสามารถนำไปปรับใช้กับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยวงจรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ Blum (2011) ใช้กับสถานการณ์ปัญหาที่ 1 และวงจรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ Schukajlow, Kolter and Blum (2015) ใช้กับสถานการณ์ปัญหาที่ 2

**สถานการณ์ปัญหาที่ 1** บุรุษไปรษณีย์คนหนึ่งต้องการส่งจดหมายในตู้จดหมายหน้าบ้านที่ตั้งอยู่ริมสองฝั่งถนนที่มีความยาว $L$ ให้ครบ โดยเขาสามารถส่งจดหมายโดยส่งให้ครบทุกบ้านที่อยู่ถนนฝั่งเดียวกันจึงข้ามถนนไปส่งที่บ้านอีกฝั่งหนึ่งจนครบ หรือเขาจะส่งจดหมายบ้านหลังแรกของในฝั่งถนนหนึ่งและข้ามถนนไปส่งที่บ้านอีกสองหลังของอีกฝั่งถนนหนึ่งจากนั้นข้ามถนนมาส่งที่บ้านอีกสองหลังของอีกฝั่งถนนหนึ่ง และส่งจดหมายเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ต้องการทราบว่าจากวิธีการจดหมายทั้งสองวิธี บุรุษไปรษณีย์จะส่งจดหมายด้วยวิธีการใดจะดีกว่ากัน (Swetz & Hartzler, 1991, หน้า 38-40)

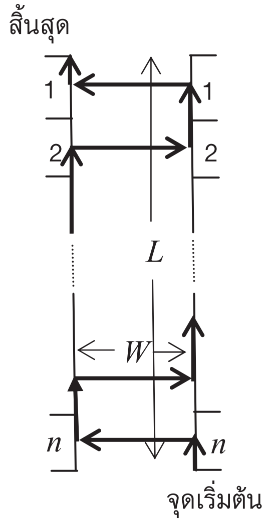
จากสถานการณ์ข้างต้นเป็นปัญหาในชีวิตจริงที่ผู้เรียนต้องแก้ปัญหาเพื่อตัดสินใจเลือกวิธีการส่งจดหมายที่ใช้ระยะทางในการเดินน้อยที่สุด เริ่มต้นด้วย

ขั้นที่ 1 อ่านทำความเข้าใจปัญหาผู้เรียนต้องอ่านสถานการณ์ปัญหา ผู้เรียนต้องทำความเข้าใจวิธีการเดินส่งจดหมายทั้งสองแบบ โดยใช้การจินตนาการหรือการวาดรูปประกอบ

ขั้นที่ 2 ทำปัญหาให้ง่ายขึ้น ผู้เรียนต้องสร้างแบบจำลองสถานการณ์ เพื่อช่วยให้สถานการณ์ปัญหาชัดเจนขึ้น โดยกำหนดสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา เช่น กำหนดให้บ้านทั้งสองฝั่งถนนสร้างเหมือนกัน จำนวนบ้านในแต่ละฝั่งถนนมีจำนวน $n$ หลัง มีตู้จดหมายวางอยู่ในตำแหน่งกึ่งกลางของหน้าบ้าน และถนนกว้าง $W$ จากนั้นนำข้อมูลไปสร้างแผนภาพ (real model) การส่งจดหมายทั้งสองวิธี ดังนี้




**วิธีเดินแบบที่ 1**




**วิธีเดินแบบที่ 2**

ขั้นที่ 3 คิดให้เป็นคณิตศาสตร์ผู้เรียนจะพิจารณาจากแผนภาพเพื่อนำไปสู่การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยพบว่าบุรุษไปรษณีย์จะเดินด้วยวิธีการที่ 1 เป็นระยะทาง $2L + W - \frac{L}{n}$ ขณะที่เขาเดินด้วยวิธีที่ 2 เป็นระยะทาง $nW + L$ ดังนั้นในการพิจารณาว่าจะส่งจดหมายด้วยวิธีใดจะดีกว่ากันจะพิจารณาจากระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 1 และระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 2 โดยแบ่งเป็น 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 1 เท่ากับระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 2

กรณีที่ 2 ระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 1 น้อยกว่าระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 2

กรณีที่ 3 ระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 2 น้อยกว่าระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 1

จากนั้นผู้เรียนนำระยะทางของทั้งสองวิธีมาสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ในรูปสมการและอสมการได้ดังนี้

กรณีที่ 1 $2L + W - \frac{L}{n} = nW + L$

กรณีที่ 2 $2L + W - \frac{L}{n} < nW + L$

กรณีที่ 3 $nW + L < 2L + W - \frac{L}{n}$

ขั้นที่ 4 ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ผู้เรียนดำเนินการแก้สมการหรืออสมการเพื่อหาคำตอบเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

กรณีที่ 1 จาก $2L + W - \frac{L}{n} = nW + L$

จะได้ว่า $\frac{L}{n}(n - 1) = (n - 1)W$

นั่นคือ $\frac{L}{n} = W$

กรณีที่ 2 จาก $2L + W - \frac{L}{n} < nW + L$ จะได้ว่า $W > \frac{L}{n}$

กรณีที่ 3 จาก $nW + L < 2L + W - \frac{L}{n}$ จะได้ว่า $W < \frac{L}{n}$

ขั้นที่ 5 แปลความหมาย ผู้เรียนแปลความหมายจากคำตอบของทั้งสามกรณีจะเห็นว่า ถ้าระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 1 และระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 2 เท่ากัน มากกว่าหรือน้อยกว่ากัน จะได้ว่า ความกว้างของถนน จะเท่ากับ มากกว่า หรือน้อยกว่าความยาวของริมฝั่งถนนหารด้วยจำนวนบ้านในแต่ละฝั่งถนน ตามลำดับ

ขั้นที่ 6 ตรวจสอบความเหมาะสม ผู้เรียนตรวจสอบความเหมาะสมของคำตอบโดยพิจารณาว่า หากความกว้างของถนน เท่ากับ มากกว่า หรือน้อยกว่าความยาวของริมฝั่งถนนหารด้วยจำนวนบ้านในแต่ละฝั่งถนนจะทำให้ระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 1 เท่ากับ น้อยกว่า และมากกว่าระยะทางเดินด้วยวิธีที่ 2 ตามลำดับเช่นเดิมหรือไม่ ซึ่งพบว่าเป็นจริงตามสถานการณ์ที่กำหนดไว้

ขั้นที่ 7 นำเสนอ ผู้เรียนนำเสนอผลลัพธ์ของปัญหาว่า บุรุษไปรษณีย์เลือกวิธีการเดินใดดีกว่ากัน จะพิจารณาจาก ความกว้างของถนน ความยาวของริมฝั่งถนน และจำนวนบ้านในแต่ละฝั่งถนน กล่าวคือ ถ้าความกว้างของถนน เท่ากับ ความยาวของฝั่งถนนหารด้วยจำนวนบ้าน จะเลือกเดินแบบใดก็ได้ ถ้าความกว้างของถนน มากกว่า ความยาวของฝั่งถนนหารด้วยจำนวนบ้าน จะเลือกเดินวิธีที่ 1 และถ้าความกว้างของถนน น้อยกว่า ความยาวของฝั่งถนนหารด้วยจำนวนบ้าน จะเลือกเดินด้วยวิธีที่ 2

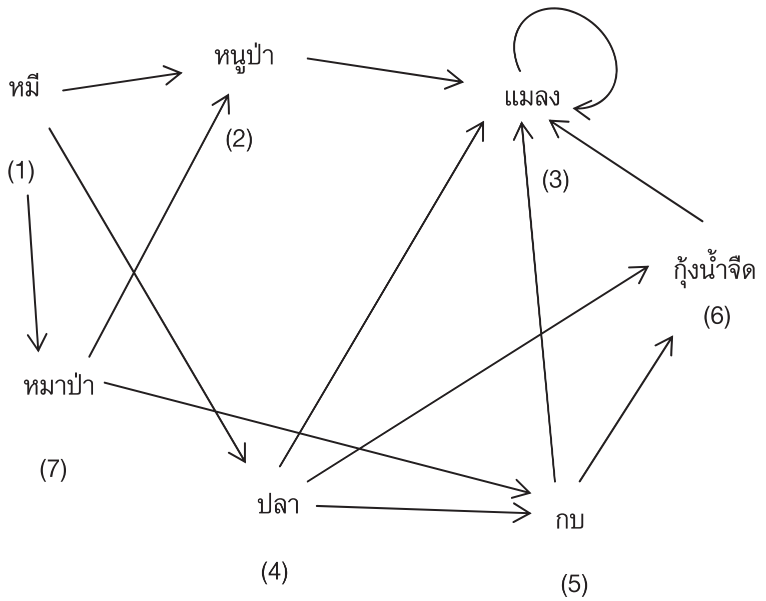
ข้อสังเกตสำหรับการแก้ปัญหาสถานการณ์นี้ พบว่า หากมีการเปลี่ยนแปลงข้อกำหนดเงื่อนไขและขอบเขตของสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา เช่น ตู้จดหมายวางไม่อยู่ในตำแหน่งกึ่งกลางของหน้าบ้าน จำนวนบ้านแต่ละฝั่งถนนไม่เท่ากัน ความกว้างของหน้าบ้านแต่ละหลังไม่เท่ากัน จะทำให้การจำลองภาพจริง การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ตลอดจนคำตอบที่ได้อาจเปลี่ยนแปลงไปด้วยเช่นกัน

**สถานการณ์ปัญหาที่ 2** ในฤดูฝน ประชากรแมลงในป่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว สร้างความรำคาญให้มนุษย์และสัตว์ป่า หน่วยงานราชการจึงต้องการกำจัดแมลงเหล่านั้น ในฐานะที่ท่านเป็นนักอนุรักษ์ธรรมชาติ ท่านจะอธิบายสิ่งที่จะเกิดขึ้นอย่างไร หากหน่วยงานของราชการทำเช่นนั้น (Swetz & Hartzler, 1991, หน้า 91-93)

สถานการณ์ข้างต้นนี้เป็นปัญหาในชีวิตจริงที่ผู้เรียนจะเห็นการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ กับศาสตร์อื่น ๆ เช่น เชื่อมโยงกับความรู้ทางวิทยาศาสตร์ เรื่อง ระบบสายใยอาหาร ระบบนิเวศ การอนุรักษ์ธรรมชาติ

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหาจากสถานการณ์ข้างต้น ผู้เรียนต้องอ่านและทำความเข้าใจปัญหาที่เกิดขึ้นผู้เรียนต้องจินตนาการในฐานะนักอนุรักษ์สิ่งแวดล้อมถึงสาเหตุของประชากรแมลงที่เพิ่มขึ้น สภาพของป่าที่แมลงถูกจำกัด ว่าจะมีผลกระทบใดเกิดขึ้นกับป่า เช่น แมลงมีประโยชน์อย่างไรในระบบนิเวศ สัตว์บางชนิดที่กินแมลงเป็นอาหารจะเป็นอย่างไร

ขั้นที่ 2 ขั้นสืบค้นข้อมูล ผู้เรียนต้องสืบค้นระบบสายใยอาหารในป่าที่เกี่ยวกับแมลงเพื่อเป็นข้อมูลในการแก้ปัญหา และสร้างความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ดังเช่นไดกราฟต่อไปนี้ โดย $A \longrightarrow B$ หมายถึง A กิน B เป็นอาหาร




จากไดกราฟข้างต้นสามารถสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในรูปของเมทริกซ์ขนาด $7 \times 7$ กำหนดโดย

$$\text{ตำแหน่ง } (i, j) \text{ ของเมทริกซ์ } = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i \text{ กิน } j \text{ เป็นอาหาร} \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จะได้เมทริกซ์แทนไดกราฟข้างต้น คือเมริกซ์ $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ หรือมองอีกนัยหนึ่ง

ว่าเป็นเมทริกซ์แทนการบริโภคโดยตรงของสัตว์ในสายใยอาหารเมื่อพิจารณาเมทริกซ์ $F^2$ จะเป็นเมทริกซ์แทนการบริโภคโดยอ้อมของสัตว์ในสายใยอาหาร และ $F + F^2$ จะเป็นเมทริกซ์แทนการบริโภคโดยตรงและโดยอ้อมของสัตว์ในสายใยอาหาร

ขั้นที่ 3 ขั้นการใช้คณิตศาสตร์ ผู้เรียนต้องพิจารณาว่า หากตัดแมลงออกจากระบบสายใยอาหารจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร และการบริโภคโดยตรงและโดยอ้อมของสัตว์ในสายใยอาหารจะเป็นอย่างไร และสร้างเมทริกซ์ใหม่ที่แทนไดกราฟที่ตัดแมลงออกจากสายใยอาหารหรือแทนการบริโภคโดยตรงของสัตว์ใน

สายใยอาหารที่แมลงถูกกำจัด เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $6 \times 6$ คือเมทริกซ์ $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

และจะได้เมทริกซ์ที่แทนการบริโภคโดยตรงและโดยอ้อมของสัตว์ในสายใยอาหารที่ตัดแมลงออก คือ

เมทริกซ์ $G + G^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 4 ขั้นอธิบายคำตอบ ผู้เรียนอธิบายคำตอบของปัญหา โดยพิจารณาจากเมทริกซ์สุดท้ายที่ได้ ซึ่งพบว่าสมาชิกทุกตัวในแถวที่สองและแถวที่สามเป็น 0 เมื่อผู้เรียนนำมาอธิบายให้สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหา จะหมายความว่าทั้งหนูป่าและกุ้งไม่มีแหล่งอาหารโดยตรงและโดยอ้อม หากแมลงถูกกำจัดไป ซึ่งสิ่งที่ได้นี้จะเป็นข้อมูลสำคัญในการชี้แจงต่อหน่วยงานราชการเกี่ยวกับเหตุผลในการไม่กำจัดแมลงไปจากป่า

ข้อสังเกตสำหรับการแก้ปัญหาสถานการณ์นี้คือ สถานการณ์ปัญหาไม่ได้กำหนดระบบสายใยอาหารของสัตว์ในป่าที่เกี่ยวข้องกับแมลงให้ ทำให้นักเรียนต้องสืบค้นข้อมูลเพิ่มเติม ซึ่งข้อมูลดังกล่าวอาจสืบค้นจากเอกสารที่ผู้สอนจัดเตรียมไว้ หรือใช้การสืบค้นทางอินเตอร์เน็ต จะเป็นการกระตุ้นความสนใจและการมีส่วนร่วมของผู้เรียน นอกจากนี้ผู้สอนต้องเตรียมกำหนดขอบเขตสถานการณ์ให้มีจำนวนชนิดของสัตว์ป่าที่เกี่ยวข้องกับแมลงไม่มากเกินไป และเพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจเกี่ยวกับการสร้างเมทริกซ์จากไดกราฟและการนำเมทริกซ์มาหาการบริโภคโดยตรงและโดยอ้อมของสัตว์ในสายใยอาหารนั้น ผู้สอนอาจเริ่มด้วยยกตัวอย่างสายใยอาหารของสัตว์จำนวน 3 ชนิดและสร้างเมทริกซ์ขนาด $3 \times 3$ ก่อน

การนำเสนอสถานการณ์ปัญหาและแนวทางการแก้ปัญหาตามวงจรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งสองข้างต้น เป็นเพียงตัวอย่างที่ผู้สอนต้องนำไปปรับใช้ให้เหมาะสมกับผู้เรียน หรือนำแนวทางที่ได้ไปใช้กับปัญหาในชีวิตจริงในบริบทอื่น ๆ เพื่อฝึกผู้เรียนแก้ปัญหาในชีวิตจริงโดยใช้วงจรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

## ข้อควรคำนึงในการนำไปใช้

1. ผู้สอนต้องตรวจสอบความรู้พื้นฐานของผู้เรียนที่จะใช้ในการแก้ปัญหาและทบทวนความรู้ของผู้เรียนให้เพียงพอที่จะเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และดำเนินการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา เพื่อไม่ให้ผู้เรียนรู้สึกว่าปัญหาในชีวิตจริงเป็นเรื่องยาก จนทำให้ผู้เรียนเกิดเจตคติที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ปัญหาในชีวิตจริงที่ผู้สอนออกแบบต้องเป็นปัญหาที่น่าสนใจและท้าทาย สัมพันธ์กับชีวิตของนักเรียน และเหมาะกับความสามารถของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนเกิดแรงจูงใจในการแก้ปัญหา
3. สำหรับผู้สอนที่เริ่มใช้แนวคิดของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ผู้สอนอาจเลือกวงจรหรือกระบวนการที่มีจำนวนขั้นตอนไม่มากนักหรือขั้นตอนไม่ซับซ้อน เพื่อให้ผู้เรียนได้คุ้นชินและทำความเข้าใจขั้นตอนได้ง่าย
4. ในช่วงแรกของการใช้กระบวนการ ผู้สอนต้องคอยแนะนำและให้การช่วยเหลือผู้เรียนเมื่อจำเป็น เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้กระบวนการ มีความคุ้นเคยกับกระบวนการและไม่รู้สึกว่ากระบวนการมีความยุ่งยาก ไม่ว่าจะเป็นการช่วยผู้เรียนในการกำหนดเงื่อนไขและขอบเขตเพื่อจำลองสถานการณ์ที่ต้องการศึกษาการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ หรือการนำคำตอบเชิงคณิตศาสตร์มาแปลงเป็นคำตอบของสถานการณ์จริง เช่น ถ้าคำตอบที่ได้เป็นจำนวนคน แต่คำตอบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากคำนวณเป็นทศนิยม ผู้เรียนจะตอบอย่างไร เป็นต้น
5. ผู้สอนต้องใช้คำถามเพื่อช่วยกระตุ้นการคิดของผู้เรียนและให้เวลาผู้เรียนในการคิดแก้ปัญหาในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการ

## บทสรุป

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ และสามารถนำไปใช้ได้กับผู้เรียนทุกระดับชั้น โดยการเลือกปัญหาในชีวิตจริงและความรู้ที่ใช้ในการแก้ปัญหาให้เหมาะสมกับผู้เรียน หากผู้สอนคณิตศาสตร์นำแนวทางนี้ไปปรับใช้ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์จะเป็นการพัฒนาผู้เรียนตามเป้าหมายของหลักสูตรที่กำหนดให้ผู้สอนต้องพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้คณิตศาสตร์สามารถประยุกต์ความรู้ไปใช้ในแก้ปัญหาในชีวิตจริงและเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ นอกจากนี้หากผู้สอนใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ โดยเน้นการให้ผู้เรียนทำงานร่วมกันแบบกลุ่มแบบร่วมมือร่วมใจเปิดโอกาสให้ผู้เรียนนำเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหา กระตุ้นการคิดโดยใช้คำถามระดับสูง จะเป็นการส่งเสริมทักษะการคิดอย่างมีวิจารณญาณและทักษะการสื่อสารและการร่วมมือให้กับผู้เรียน ซึ่งถือว่าเป็นการบูรณาการการพัฒนาทักษะในศตวรรษที่ 21 ควบคู่ไปกับการเรียนการรู้คณิตศาสตร์อีกด้วย

# รายการอ้างอิง

**ภาษาไทย**

ทรงชัย อักษรคิด. (2555). *การแก้ปัญหาและการตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ Mathematical Problem Solving and Problem Posing.* กรุงเทพมหานคร: บริษัท วิสต้าอินเตอร์ปริ้น จำกัด.

**ภาษาอังกฤษ**

Anhalt, C. O., & Cortez, R. (2015). Mathematical modeling: A structured process. *Mathematics Teacher, 108*(6), 446-452.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1993). *Problem Solving, Reasoning, and Communicating, K-8: Helping ChildrenThink Mathematically.* Prentice Hall.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In Kaiser G., Blum W., Borromeo Ferri R., & Stillman G. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 15-30). Springer Netherlands.

Cirillo, M., Pelesko, J.A., Felton-Koestler, M.D., & Rubel, L. (2016). Perspectives on modeling in school mathematics. In Hirsch C. R., & McDuffie, A. R. (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (pp. 3-16). National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.

Krug A., & Schukajlow, S. (2013). Problems with and without connection to reality and students' task-specific interest. In *Proc. 37th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 209-216).

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2014). *Helping Children Learn Mathematics.* John Wiley & Sons.

Schukajlow, S., Kolter, J., & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan, *ZDM: Mathematics Education, 47,* 1241-1254.

Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., M?ller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educational Studies in Mathematics, 79*(2), 215-237.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum.* National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1906 Association Drive, Reston, VA 22091.

**ผู้เขียน**

**อาจารย์ ดร.ศันสนีย์ เณรเทียน** สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อีเมล: sansanee.n@chula.ac.th